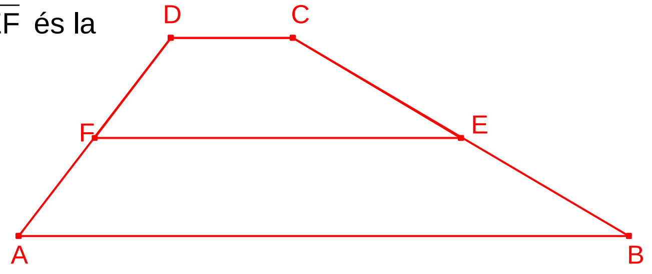
Problemes de Geometria per a l'ESO 119

1181.- En un trapezi de bases paral·leles $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, E és el punt mig de $\overline{BC}$ i F el punt mig de $\overline{AD}$.

Si l'àrea del quadrilàter ABEF és el doble de l'àrea del quadrilàter FECD, calculeu $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 4. Problema 25.

Solució:



Els quadrilàters ABEF, FECD són trapezis ja que $\overline{EF}$ és la paral·lela mitjana del trapezi.

$$\overline{EF}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right).$$

L'altura del trapezi ABCD és el doble de l'altura del trapezi FECD.

Siga h l'altura del trapezi ABCD.

Si l'àrea del trapezi ABEF és el doble de l'àrea del trapezi FECD, aleshores, l'àrea del trapezi ABCD és el triple de l'àrea del trapezi FECD.

La superfície del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)h.$$

La superfície del trapezi FECD és:

$$S_{FECD}=\frac{1}{2}\left(\overline{FE}+\overline{CD}\right)\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}+\overline{CD}\right)\frac{h}{2}.$$

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)h=3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}+\overline{CD}\right)\frac{h}{2}\right).$$

Simplificant:

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\frac{3}{4}\left(\overline{AB}+3\overline{CD}\right).$$

$$\overline{AB}=5\overline{CD}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=5.$$

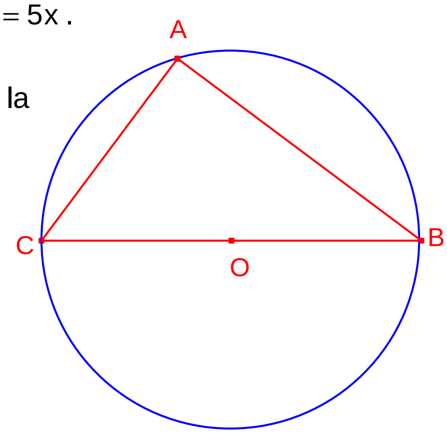
1182.- Les longituds dels costats d'un triangle són proporcionals als nombres 3, 4, i 5.

Si el triangle està inscrit en una circumferència de radi 3, calculeu l'àrea del triangle.
Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 4. Problema 19.

Solució:

El triangle és rectangle ja que $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AC} = 3x$, $\overline{AB} = 4x$, $\overline{BC} = 5x$.



$A = 90^{o}$.

Si el triangle rectangle està inscrit en una circumferència la hipotenusa és diàmetre de la circumferència.

$\overline{BC} = 2 \cdot 3 = 6$.

$5x = 6$. Resolent l'equació:

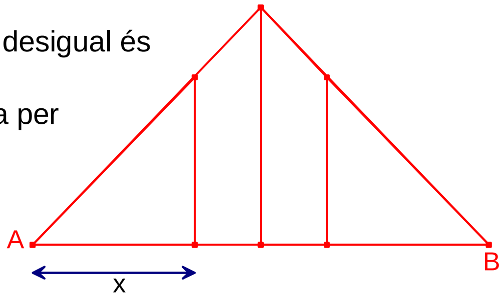
$x = \frac{6}{5}$.

$\overline{AC} = \frac{18}{5}$, $\overline{AB} = \frac{24}{5}$.

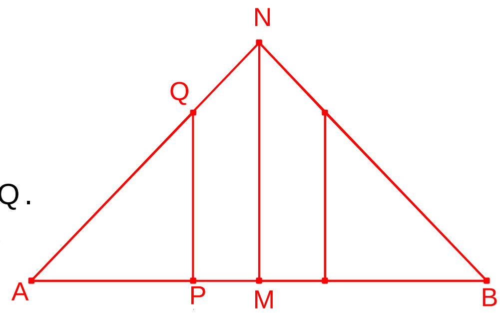
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}\frac{18}{5}\frac{24}{5} = \frac{216}{25}$.

1183.- En el triangle isòsceles de la figura, el costat desigual és $\overline{AB}=12$ i està dividit en quatre polígons d'igual àrea per segments perpendiculars al costat $\overline{AB}$.
Determineu el valor de x.
Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 4. Problema 15.



Solució:
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{AP}=x$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{AMN}$ són semblants.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.
Dos triangles que són semblants la proporció de les àrees és igual al quadrat de la proporció dels costats:



$$\frac{1}{2}=\frac{S_{APQ}}{S_{AMN}}=\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}\right)^2.$$

$\frac{1}{2}=\left(\frac{x}{6}\right)^2$. Resolent l'equació:

$x=3\sqrt{2}$.

1184.- Determineu l'àrea del polígon els vèrtexs del qual són els punts d'intersecció de les corbes $x^2+y^2=25$ i $(x-4)^2+9y^2=81$.

Concurso de Primavera, 1ª fase 2014. Nivell 4. Problema 24.

Solució:

Per determinar els punts d'intersecció de les dues corbes, resoldrem el sistema format per les seues equacions:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ (x-4)^2+9y^2=81 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y^2=25-x^2 \\ x^2-8x+9y^2=65 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y^2=25-x^2 \\ x^2+x+20=0 \end{cases}.$$

Les solucions del sistema són: $\begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$.

Els punts intersecció d'ambdues corbes són:

$A(-5,0)$, $B(4,-3)$, $C(4,3)$.

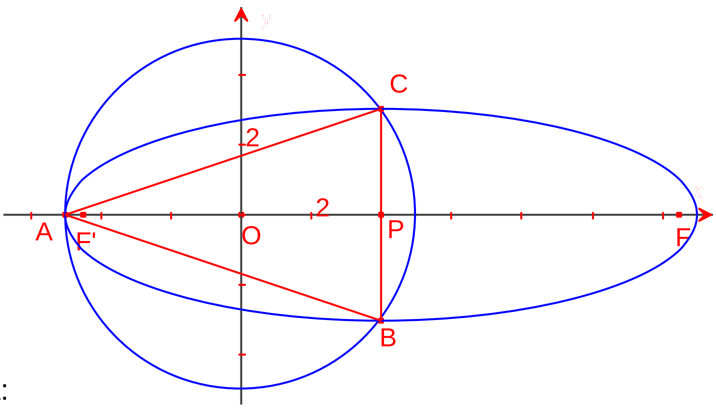
El triangle és isòsceles.

Siga $P(4,0)$ el punt mig del costat $\overline{BC}$.

$\overline{BC}=6$, $\overline{AP}=9$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AP}=\frac{1}{2}6\cdot 9=27.$$



Nota:

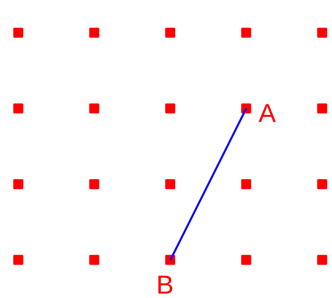
$x^2+y^2=25$ és una circumferència de centre $O(0,0)$ i radi 5.

$(x-4)^2+9y^2=81$, $\frac{(x-4)^2}{9^2}+\frac{y^2}{3^3}=1$, és una el·lipse de centre $P(4,0)$, semieix major $a=9$, semieix menor, $b=3$, semidistància focal $c=6\sqrt{2}$ i excentricitat $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

1185.- En la graella de la figura hem marcat el segment $\overline{AB}$.

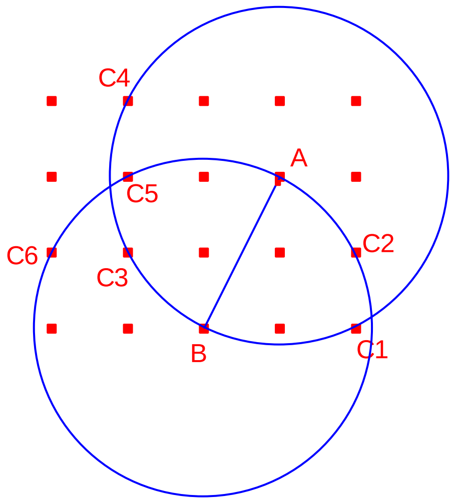
De quantes formes podem escollir el punt C en la graella a fi que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga isòsceles.

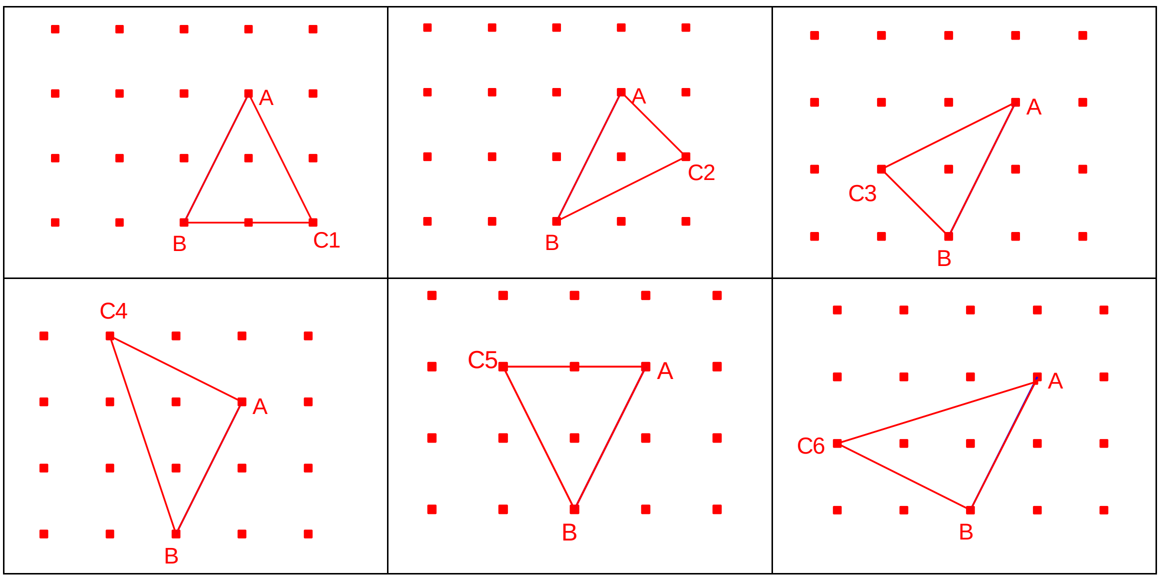
Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 2. Problema 14.



Solució:

De 6 formes distintes:

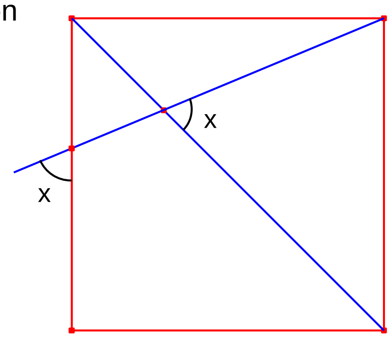




1186.- En el quadrat de la figura els dos angles marcats són iguals.

Determineu la seua mesura.

Concurso de Primavera, 2ª fase 2014. Nivell 2. Problema 22.



Solució:

Siga ABCD el quadrat.

Siguen P, Q els vèrtexs dels angles x.

$\angle PDQ = 45^o$.

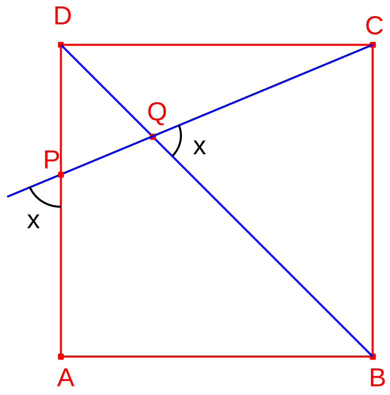
$\angle DPQ = x$, angles oposats pel vèrtex.

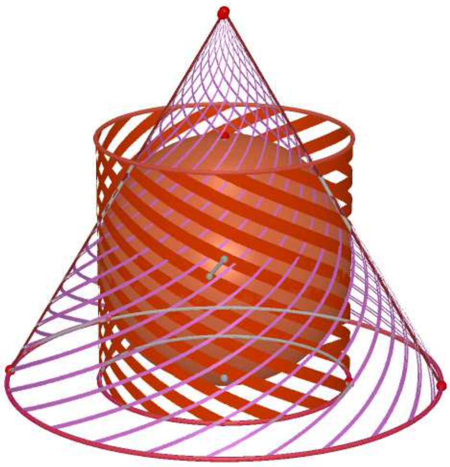
$\angle PQD = x$, angles oposats pel vèrtex.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{PQD}$ és 180º:

$45^o + x + x = 180^o$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{135^o}{2} = 67^o 30'.$$

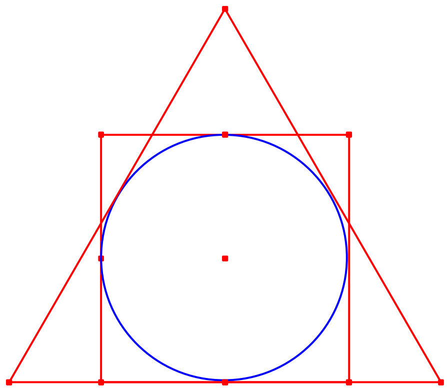




1187.- Una esfera té circumscrits un cilindre i un con equilàter (la generatriu és igual al diàmetre). Proveu que.

a) L'àrea del cilindre és mitjana geomètrica de les àrees del con i de l'esfera.
b) El volum del cilindre és mitjana geomètrica dels volums del con i de l'esfera.
Adoración Tapiador. Geometría. Pàgina 382. Problema 83.

Solució:
Siga r el radi de l'esfera.
La secció axial del con forma una circumferència amb l'esfera de radi r, un quadrat de costat 2r en el cilindre i un triangle circumscrit a la circumferència de radi r.
Aleshores:
El radi del cilindre és r i la sua altura és 2r.
El radi del con és $r\sqrt{3}$, l'altura 3r i la generatriu $2r\sqrt{3}$.

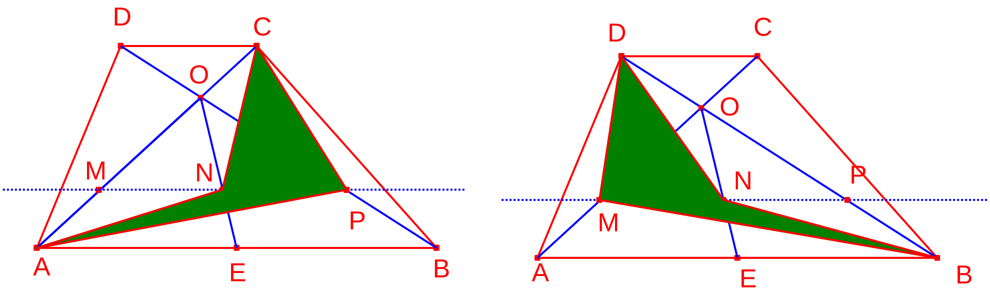


a)
L'àrea del cilindre és:
$S_{cilindre} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$.
L'àrea del con és:
$S_{con} = \pi\left(r\sqrt{3}\right)^2 + \pi r\sqrt{3}\left(2r\sqrt{3}\right) = 9\pi r^2$.
L'àrea de l'esfera és:
$S_{esfera} = 4\pi r^2$.
$\left(S_{cilindre}\right)^2 = S_{con} \cdot S_{esfera}$.
$\left(6\pi r^2\right)^2 = 9\pi r^2 \cdot 4\pi r^2$.
Aleshores, l'àrea del cilindre és mitjana geomètrica de les àrees del con i de l'esfera.
b)
El volum del cilindre és:
$V_{cilindre} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.
El volum del con és:
$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\left(r\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3r = 3\pi r^3$.
El volum de l'esfera és:
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$.
$\left(V_{cilindre}\right)^2 = V_{con} \cdot V_{esfera}$.
$\left(2\pi r^3\right)^2 = 3\pi r^3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$.
Aleshores, el volum del cilindre és mitjana geomètrica dels volums del con i de l'esfera.

1188.- En el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, siga E el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga O la intersecció de les diagonals del trapezi.

Una recta paral·lela a la base talla els segment $\overline{OA}$, $\overline{OE}$, $\overline{OB}$ en els punt M, N i P, respectivament.
Proveu que les àrees del quadrilàters APCN, BNDM són iguals.

Solució:



Per ser MP paral·lela al costat $\overline{AB}$ els triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{MPO}$ són semblants.
E és el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Aleshores, N és el punt mig del costat $\overline{MP}$.
$\overline{MN} = \overline{NP}$.
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea.
Els triangles $\overset{\Delta}{NPA}$, $\overset{\Delta}{MNB}$ tenen la mateixa base $\overline{MN} = \overline{NP}$ i la mateixa altura, aleshores:

$S_{NPA} = S_{MNB}$ (1)

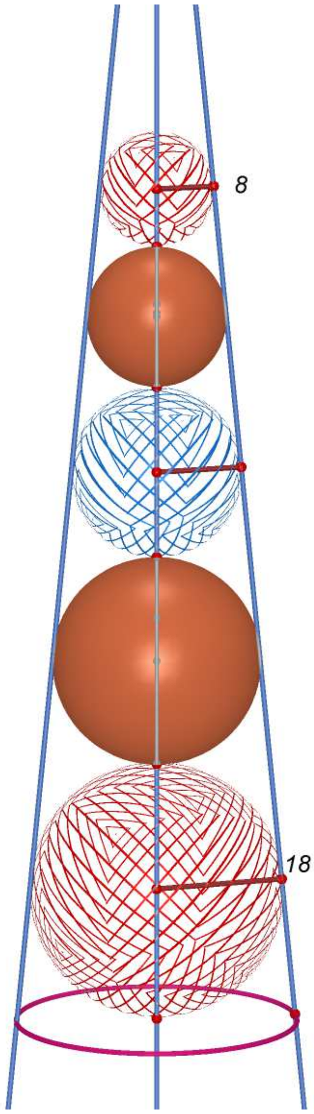
Els triangles $\overset{\Delta}{NPC}$, $\overset{\Delta}{MND}$ tenen la mateixa base $\overline{MN} = \overline{NP}$ i la mateixa altura, aleshores:

$S_{NPC} = S_{MND}$ (2)

Sumant les expressions (1) (2):

$S_{NPA} + S_{NPC} = S_{MNB} + S_{MND}$ (3)

$S_{APCN} = S_{BNDM}$.

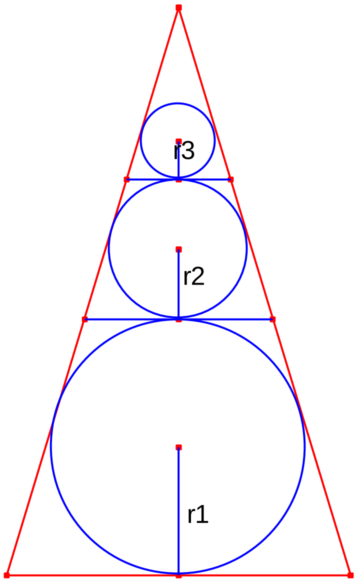


1189.- Cinc esferes de distintes dimensions són tangent a un con.

Cadascuna de les esferes és tangent a l'esfera adjacent.
L'esfera gran té radi 18 i la menuda 8.
Determineu el radi de l'esfera central.
Olimpíada Al-Kwharizmi 2014. Nivell B.

Solució:
Considerem el plànol axial del con que passa pel centre de les 5 esferes.
El plànol axial forma amb les generatrius del con un triangle isòsceles.
Siguen en aquest ordre els radis de les esferes:
18, a, b, c, 8.

Si tenim tres circumferències tangents als costats iguals d'un triangle isòsceles i tangents entre elles és té la següent relació de radis:



$r_1 \cdot r_3 = r_2^2$.

Demostració: Els tres triangles són semblants i les tres circumferències són inscrites en els triangles. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3}$.

Aplicant aquesta propietat a les esferes:

$$\begin{cases} 18b = a^2 \\ 8b = c^2 \\ b^2 = ac \end{cases}.$$

$b^2 = 144$.

$b = 12$.

1190.- Tenim dos triangles iguals amb àrea igual a 25 unitats quadrades, els vèrtexs dels quals estan formats per les interseccions de les rectes $x = 0$, $y = -1$ i $y = \frac{1}{2}x + b$.

Determineu els dos possibles valors de b.

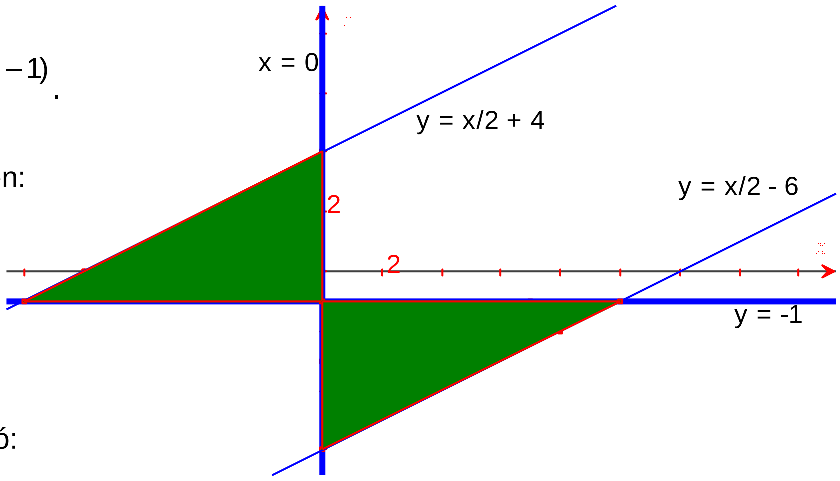
Olimpíada Al-Kwharizmi 2014. Nivell B.

Solució:

Es formen dos triangles rectangles.

Determinem els punt intersecció de les rectes $y = -1$ i $y = \frac{1}{2}x + b$, resolent el sistema format per ambdues equacions:

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + b \\ y = -1 \end{cases}$. $y = -1$ i $\begin{cases} x = 2(-b-1) \\ y = -1 \end{cases}$.



Els catets dels triangles mesuren:

$2|-b-1|$, $|b+1|$.

L'àrea del triangle és 25, aleshores:

$\frac{1}{2}2|-b-1| \cdot |b+1| = 25$

$(b+1)^2 = 25$. Resolent l'equació:

$b = 4, -6$.