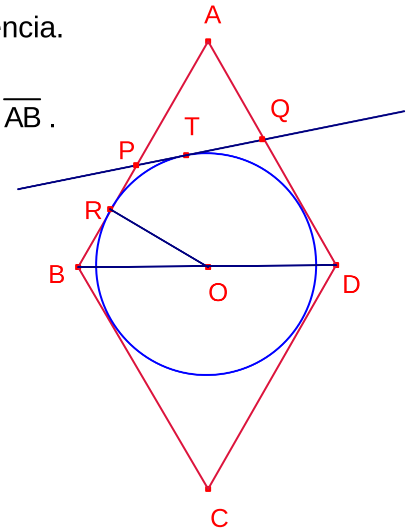
Problemes de geometria per a l'ESO 12

111.- En un rombe ABCD de costat 4cm i angle $\angle BAD = 60^{o}$ està inscrita una circumferència. A aquesta circumferència s'ha traçat una tangent que talla $\overline{AB}$ en el punt P i a $\overline{AD}$ en el punt Q. Determineu les mesures de $\overline{PB}$ i $\overline{QD}$ si $\overline{PQ} = 2cm$.
Gúsiev, problema 187.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència tangent al rombe.
Siga T el punt de tangència del segment $\overline{PQ}$ i la circumferència.
Siga $x = \overline{PT}$, $y = \overline{QT}$, $x + y = 2$ (1)
Siga R el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AB}$.

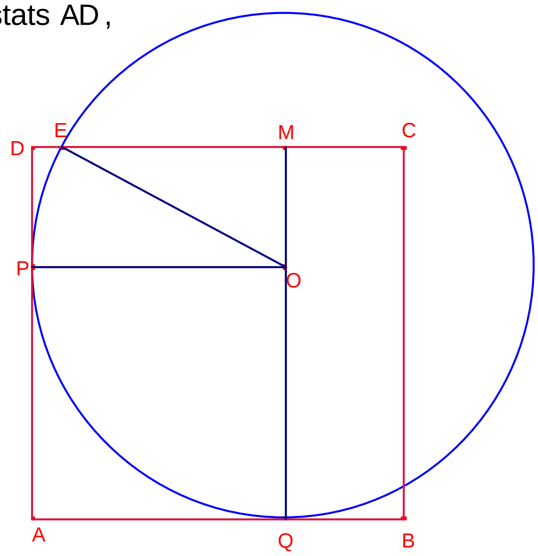


$\overline{PR} = \overline{PT} = x$
$\angle BOR = 30^{o}$, aleshores:
$\overline{BR} = 1$, $\overline{OR} = \sqrt{3}$.
$\overline{AR} = 3$, $\overline{AP} = \overline{AR} - \overline{PR} = 3 - x$.
Anàlogament, $\overline{AQ} = 3 - y$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:
$2^2 = (3 - x)^2 + (3 - y)^2 - (3 - x)(3 - y)\cos 60^{o}$.
Simplificant:
$x^2 + y^2 - xy - 3x - 3y + 5 = 0$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1), (2):
$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - xy - 3x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ la solució del qual és $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.
Aleshores, $\overline{PB} = \overline{QD} = 2cm$.

112.- Una circumferència és tangent a dos costats adjacents d'un quadrat i divideix cadascun dels altres dos costats en dos segments de longituds 2 i 23cm. Determineu el radi de la circumferència.
Gúsiev, problema 186.

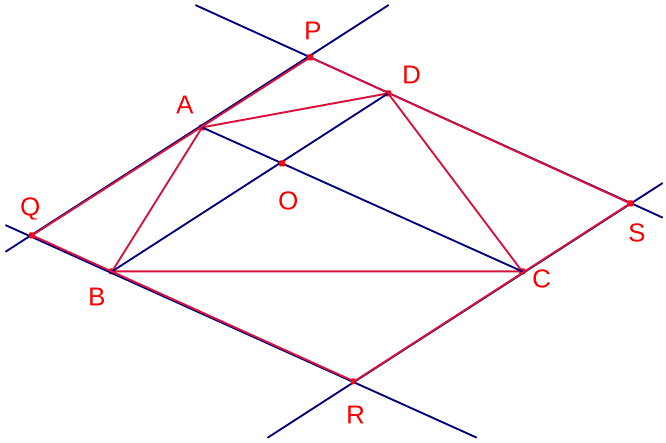
Solució:
El costat del quadrat mesura 25cm.
Siga O en centre de la circumferència.
Siga E el punt on la circumferència talla el costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{DE}=2, \overline{CE}=23$.
Siguen P, Q els punts projecció de O respecte dels costats $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, respectivament.
Siga $r=\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OE}$, radi de la circumferència.
Siga M el punt projecció de O sobre el costat $\overline{CD}$



El triangle $\overset{\Delta}{OME}$ és rectangle.
$\overline{ME}=\overline{DM}-\overline{DE}=r-2$.
$\overline{OM}=\overline{AD}-\overline{AP}=25-r$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OME}$:
$r^2=(25-r)^2+(r-2)^2$.
Resolent l'equació en la incògnita r:
$r=17\text{cm}$.

113.- Pels vèrtexs d'un quadrilàter es tracen rectes paral·leles a les seues diagonals. Demostreu que l'àrea del paral·lelogram obtingut és dos vegades l'àrea del quadrilàter donat.
Gúsiev, problema 248.

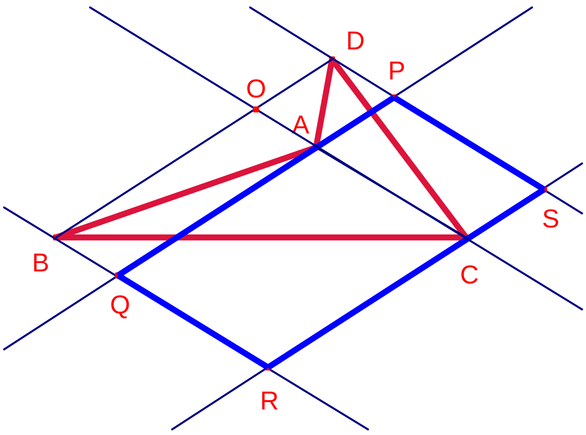
Solució:
Siga O la intersecció de les diagonals.
Siga P la intersecció de la paral·lela a $\overline{BD}$ que passa pel punt A i la paral·lela a $\overline{AC}$ que passa per D.



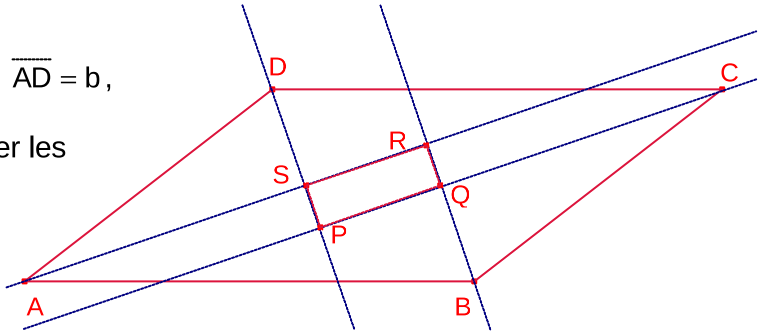
ODPA és un paral·lelogram i $\overline{AD}$ és la diagonal. Aleshores:
$S_{AOD} = S_{APD}$.
Anàlogament:
$S_{AOB} = S_{AQB}$, $S_{BOC} = S_{BRC}$, $S_{COD} = S_{CSD}$.

$$S_{PQRS} = S_{OAPD} + S_{OBQA} + S_{OCRB} + S_{ODSC} = 2 \cdot S_{AOD} + 2 \cdot S_{AOB} + 2 \cdot S_{BOC} + 2 \cdot S_{COD} =$$
$$= 2 \cdot (S_{AOD} + S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD}) = 2 \cdot S_{ABCD}.$$

Si el quadrilàter és còncau la demostració seria igual:
$$S_{PQRS} = S_{ODSC} - S_{OAPD} + S_{OCRB} - S_{OBQA} = 2 \cdot S_{COD} - 2 \cdot S_{BOC} + 2 \cdot S_{BOC} - 2 \cdot S_{AOB} =$$
$$= 2 \cdot (S_{COD} - S_{AOD} + S_{BOC} - S_{AOB}) = 2 \cdot S_{ABCD}.$$



114.- Els costats d'un paral·lelogram són a i b, l'angle entre ells és α. Determineu l'àrea del paral·lelogram format per les bisectrius dels angles interns del paral·lelogram.
Gúsiev, problema 249.



Solució:
Siga el paral·lelogram ABCD, $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\alpha = \angle DAB$.
Siga PQRS el paral·lelogram format per les bisectrius.
$\angle ADC = 180^o - \angle DAB = 180^o - \alpha$.
$\angle DAS = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ADS = 90^o - \frac{\alpha}{2}$.
Aleshores, $\angle ASD = 90^o$.
Per tant, el paral·lelogram PQRS és un rectangle.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPD}$:
$\frac{\overline{PC}}{a} = \cos\frac{\alpha}{2}$. Aleshores, $\overline{PC} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQC}$:
$\frac{\overline{QC}}{b} = \cos\frac{\alpha}{2}$. Aleshores, $\overline{QC} = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$.

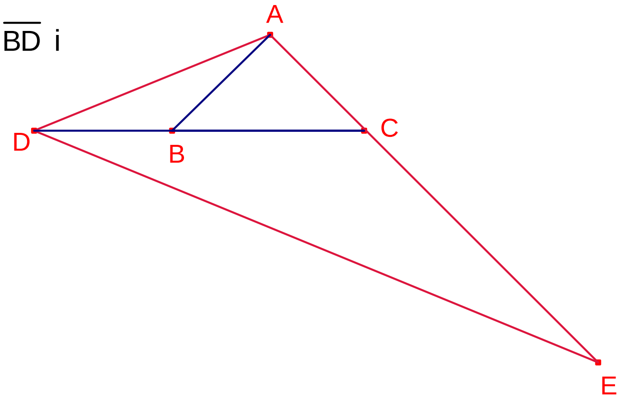
Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{PC} - \overline{QC} = (a-b)\cos\frac{\alpha}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPD}$:
$\frac{\overline{PD}}{a} = \sin\frac{\alpha}{2}$. Aleshores, $\overline{PD} = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASD}$:
$\frac{\overline{SD}}{b} = \sin\frac{\alpha}{2}$. Aleshores, $\overline{SD} = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

Aleshores, $\overline{PS} = \overline{PD} - \overline{SD} = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$.

$$S_{QRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{PS} = (a-b)^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{(a-b)^2}{2}\sin\alpha .$$

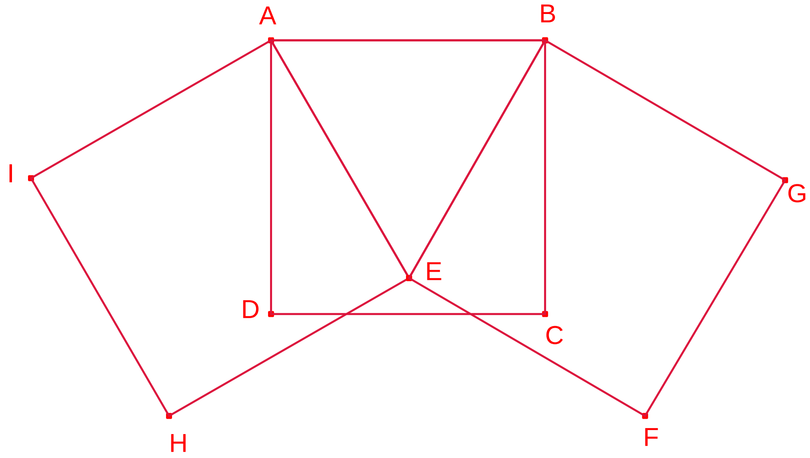


115.- En la següent figura $\angle BAC = 90^o$, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD}$ i $\overline{CD} = \overline{CE}$. Calculeu els angles del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$

Solució:

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
Aleshores, $\angle ABC = \angle ACB = 45^o$.
Per tant, $\angle ABD = BDE = 135^o$.
El triangle $\overset{\Delta}{CDE}$, aleshores, $\angle DEC = \angle CDE = \dfrac{45^o}{2}$.
El triangle $\overset{\Delta}{ADB}$, aleshores, $\angle ADB = \angle BAD = \dfrac{45^o}{2}$.
Aleshores, $\angle ADE = 45^o$, $\angle DAC = 90^o + \dfrac{45^o}{2} = \dfrac{225^o}{2}$.

116.- El la següent figura ABCD, AEHI, BEFG són quadrats iguals.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BDF$.



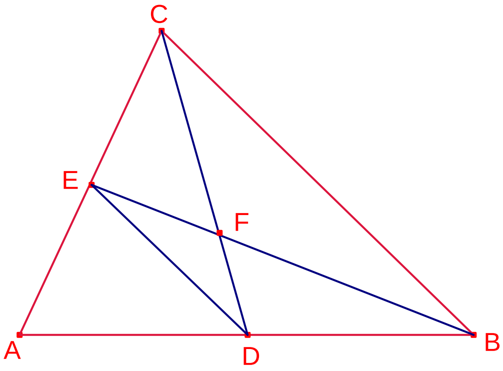
Solució:

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és equilàter ja que els costats del quadrats són iguals.

Notem que el gir de centre B i 60º transforma el quadrat BADC en el quadrat BEFG.
El punt F és el transformat per aquest gir del punt D, aleshores, $\angle DBF = 60º$

Com que $\overline{BD} = \overline{BF}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BDF}$ és equilàter per tant, $\angle BDF = 60º$.

117.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, D és el punt mig del costat $\overline{AB}$ i E és el punt mig del costat $\overline{AC}$. Les rectes BE i CD es tallen en el punt F. Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és $6cm^2$.
Calculeu la diferència entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BCF}$ i $\overset{\Delta}{DEF}$



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

El punt F és la intersecció de les mitjanes (baricentre).
Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{CF} = 2\cdot\overline{FD}$, $\overline{BF} = 2\cdot\overline{FE}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DBE}$ tenen la mateixa altura i a més a més, $\overline{AD} = \overline{DB}$.
Aleshores, $S_{DBE} = S_{ADE} = 6$.

Els triangles $\overset{\Delta}{EFD}$, $\overset{\Delta}{DBE}$ tenen la mateixa altura i a més a més, $\overline{EB} = 3\cdot\overline{EF}$.
$\frac{S_{EFD}}{S_{DEF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} = \frac{1}{3}$, aleshores, $S_{EFD} = \frac{1}{3}6 = 2$.

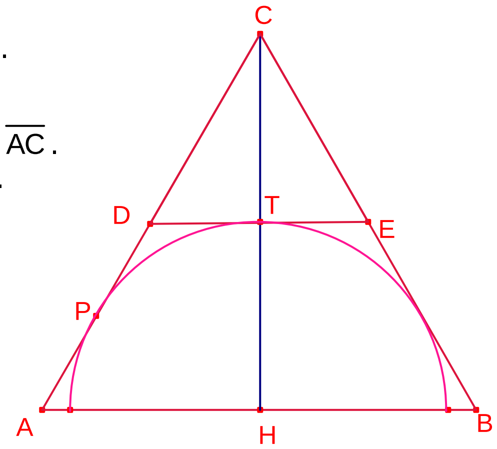
Els triangles $\overset{\Delta}{EFD}$, $\overset{\Delta}{BFC}$ són semblants la raó proporció és $\overline{DE} : \overline{BC} = 1:2$
Les àrees són proporcionals al quadrat de la raó dels costats proporcionals.
$\frac{S_{BCF}}{S_{DFE}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}\right)^2 = 4$.
$S_{BCF} = 4\cdot S_{DFE} = 8$.

La diferència d'àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BCF}$ i $\overset{\Delta}{DEF}$ és:
$S_{BCF} - S_{DEF} = 8 - 2 = 6cm^2$.

118.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ es traça una circumferència el diàmetre de la qual està en $\overline{AB}$ i es tangent als costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. Siga la recta r paral·lela al costat $\overline{AB}$ tangent a la circumferència que talla els costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ en els punts D, E, respectivament.

Determineu la relació entre els perímetres dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDE}$.
3ª Cabri Olimpíada Argentina.

Solució:



La circumferència té el centre en el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga $\overline{CH}$ la altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga P el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AC}$.
Siga T el punt de tangència de la recta r i la circumferència.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPH}$, $\angle PCH = 30^\circ$.

Aleshores, $\overline{PH} = \frac{1}{2}\overline{CH}$.

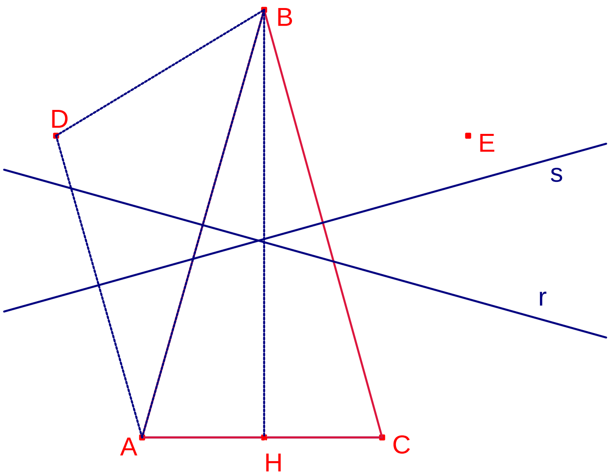
$\overline{PH} = \overline{HT}$, per ser radis de la circumferència.

Aleshores, $\overline{CT} = \overline{CH} - \overline{HT} = \frac{1}{2}\overline{CH}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDE}$, són equilàters la proporció entre els perímetres és igual a la raó de proporcionalitat entre és altures.

$$\frac{\text{perímetre} CDE}{\text{perímetre} ABC} = \frac{\overline{CT}}{\overline{CH}} = \frac{1}{2}.$$

119.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$, siguen r i s les mediatrius als costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivament. Siga D el simètric de A respecte a la recta s i E el simètric de C respecte de la recta r, Determineu la mesura de l'angle $\angle DBE$ en funció de la mesura de l'angle $\angle ABC$.
3ª Cabri Olimpíada Argentina.



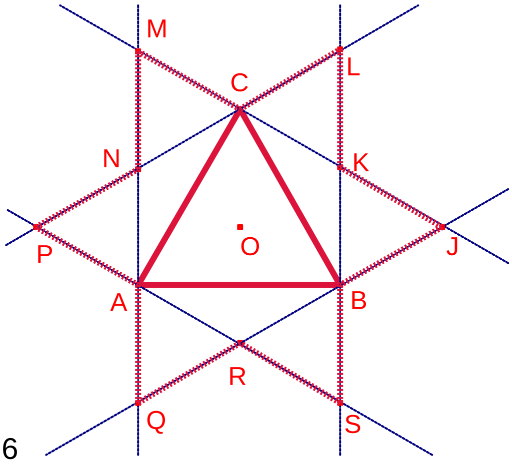
Solució:
Siga $\angle ABC = 2\alpha$. Aleshores, $\angle BCA = 90º - \alpha$.
Siga $\overline{BH}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\angle ABH = \angle CBH = \alpha$.

$\overline{BD}$ és el simètric de $\overline{CA}$ respecte de la recta s.
Aleshores, BDAC és un trapezi isòsceles, aleshores:
$\angle CBD = \angle BCA = 90º - \alpha$.
$\angle DBH = \angle CBD - \angle CBH = 90º - 2\alpha$.

El punt E és simètric de D respecte de BH, aleshores:
$\angle DBE = 2 \cdot \angle DBH = 180º - 4\alpha$.

120.- Donat un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ es tracen per A les perpendiculars a AB i AC, per B les perpendiculars a BC i BA i per C les perpendiculars a CA i CB. Determineu la raó entre les àrees de l'estrella formada i el triangle.
4ª Cabri Olimpíada Argentina.

Solució:



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle equilàter de centre O.
Siga JKLCMNPAQRSB l'estrella formada.

ARBKCN és un hexàgon regular.

$S_{AOC} = S_{ANC}$.
Aleshores, $S_{ARBKCN} = 2 \cdot S_{ABC}$.

$\overset{\Delta}{BJK}$ és un triangle equilàter.

L'estrella està formada pel hexàgon regular ARBKCN i 6 triangles iguals al triangle equilàter $\overset{\Delta}{BJK}$ que sumen la mateixa àrea que la de l'hexàgon regular ARBKCN.
Aleshores,
$S_{estrella} = 2 \cdot S_{ARBKCN} = 4 \cdot S_{ABC}$.

$$\frac{S_{estrella}}{S_{ABC}} = 4.$$