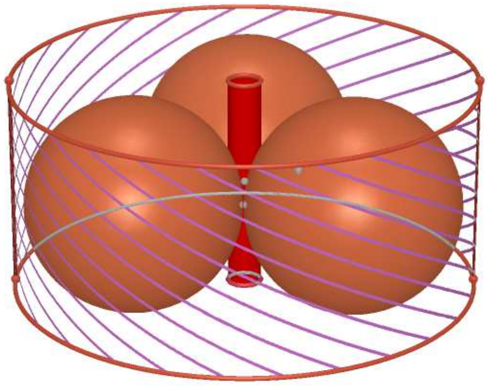
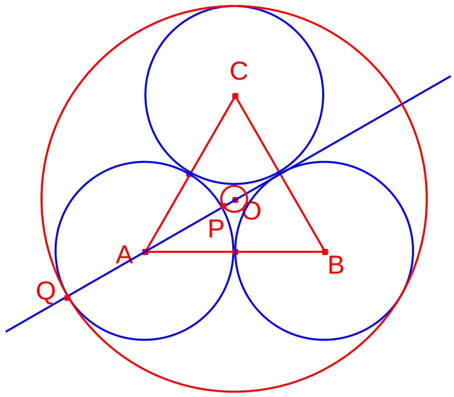
Problemes de Geometria per a l'ESO 120

1191.- Tres esferes de radi R són tangents 2 a 2 i tangents al plànol.
Les esferes tenen un cilindre inscrit i un cilindre circumscrit (tangents a les esferes) d'altura 2R.
Calculeu la proporció entre els volums dels cilindres.



Solució:

Els centres de les tres esferes formen un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat 2R.
Siga O el centre del triangle.



Siga $\overline{OP} = s$ radi del cilindre inscrit.
Siga $\overline{OQ} = t$ radi del cilindre circumscrit.

$$\overline{OA} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,R.$$

$$s = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)R.$$

$$t = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)R.$$

El volum del cilindre inscrit és:

$$V_1 = \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right)^2 R^2 \cdot 2R.$$

El volum del cilindre circumscrit és:

$$V_2 = \pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)^2 R^2 \cdot 2R.$$

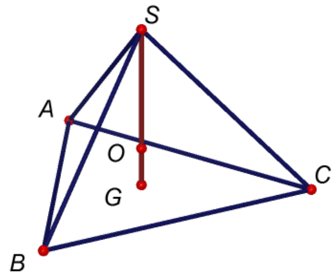
La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3}\right)^2 = 97 - 56\sqrt{3} \approx 0.005155.$$

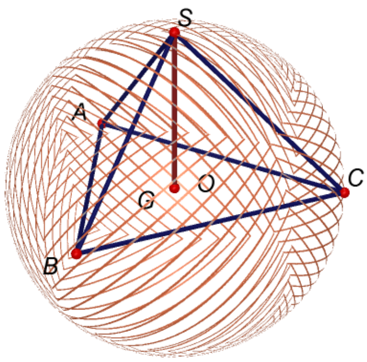
1192.- L'aresta de la base d'una piràmide triangular regular és igual a $3\sqrt{3}$ i el radi de l'esfera circumscrita a la piràmide és 3.

Calculeu el volum de la piràmide.
Selectivitat russa maig 1996 2.7.

Solució:

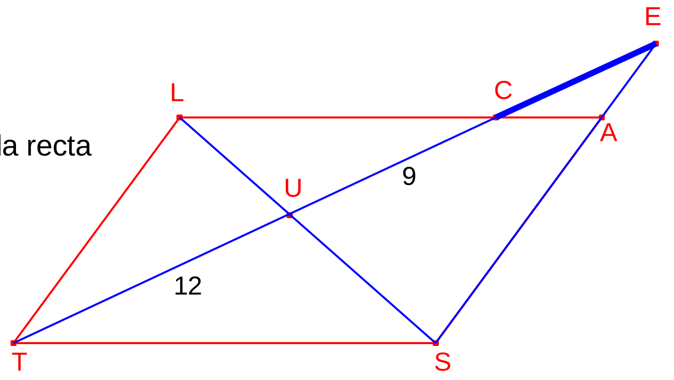


Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga G el circumcentre de la base.
El centre O de la circumferència pertany a la recta GS.
$\overline{OS} = \overline{OC} = 3$.
$\overline{CG} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}3\sqrt{3} = 3$.
Aleshores, O i G coincideixen.
$\overline{GS} = \overline{OS} = 3$.
El volum de la piràmide és:
$V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BC}^2 \cdot \overline{OS} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(3\sqrt{3}\right)^2 3 = \frac{27}{4}\sqrt{3}$.



$27\sqrt{3}/4\ cm^3$

1193.- En la figura LAST és un paral·lelogram.



Siga el punt U en la diagonal $\overline{LS}$.

La recta TU talla el costat $\overline{LA}$ en el punt C i a la recta SA en el punt E.

Si $\overline{TU}=12, \overline{UC}=9$ determineu la mesura del segment $\overline{CE}$.

Solució:

Siga $\overline{CE}=x$.

Siga $\overline{TS}=\overline{LA}=a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{TSU}$, $\overset{\Delta}{CLU}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{12}=\frac{\overline{LC}}{9}.$$

$$\overline{LC}=\frac{3}{4}a.$$

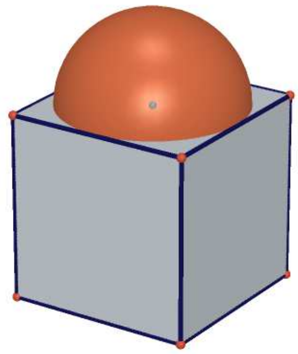
$$\overline{CA}=a-\overline{LC}=\frac{1}{4}a.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{TSE}$, $\overset{\Delta}{CAE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{x}{\frac{1}{4}a}=\dfrac{21+x}{a}$. Simplificant:

$4x=21+x$. Resolent l'equació:

$x=7$.



1194.- La figura està formada per un cub d'aresta a i una semiesfera tangent a les arestes de la cara superior del cub.

Calculeu l'àrea i el volum de la figura.

Solució:

L'àrea és igual a l'àrea de 6 quadrats d'aresta a, menys l'àrea d'un cercle de radi $\frac{a}{2}$,

Lmés l'àrea d'una semiesfera de radi $\frac{a}{2}$:

$$S = 6a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \left(6 + \frac{\pi}{4}\right)a^2 .$$

El volum de la figura és igual al volum d'un cub d'aresta a, més el volum d'una semiesfera de radi $\frac{a}{2}$:

$$V = a^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\right) = \left(1 + \frac{\pi}{12}\right)a^3 .$$

1195.- En un mosaic de l'església de Santa Maria del Trastevere de Roma hi ha el següent triangle de Sierpinski.

Determineu la proporció entre la zona pintada de roig i la pintada de verd del triangle.

Solució:
Siga S l'àrea del triangle exterior.

L'àrea pintada de color roig és igual a l'àrea d'1 triangle d'àrea $\frac{1}{4}S$ més l'àrea de 3 triangles d'àrea $\frac{1}{16}S$.

$$S_r = \frac{1}{4}S + 3\frac{1}{16}S = \frac{7}{16}S.$$

L'àrea pintada de verd és igual a 9 triangles d'àrea $\frac{1}{64}S$ més l'àrea de 27 triangles d'àrea $\frac{1}{256}S$.

$$S_v = 9\frac{1}{64}S + 27\frac{1}{256}S = \frac{63}{256}S.$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_r}{S_v} = \frac{\frac{7}{16}S}{\frac{63}{256}S} = \frac{16}{9}.$$

1196.- Siga ABCD un quadrat de costat 1.

Siguen M i N punts dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament, tal que $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=7$ i $\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}=2$.

Siga P la intersecció de les rectes CM i DN.

a) Demostreu que $13\overrightarrow{AP}=12\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$.

b) Calculeu la mesura del segment $\overline{AP}$.

Solució:

Considerem el quadrat ABCD en les següents coordenades:

$A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$.

Els punts M, N tenen coordenades:

$M\left(\dfrac{7}{8},0\right)$, $N\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Les rectes CM, DN tenen les següents equacions:

$r_{CM}\equiv y=8x-7$, $r_{DN}\equiv y=\dfrac{-2}{3}x+1$.

Resolent el sistema format per les dues rectes, les coordenades de P són:

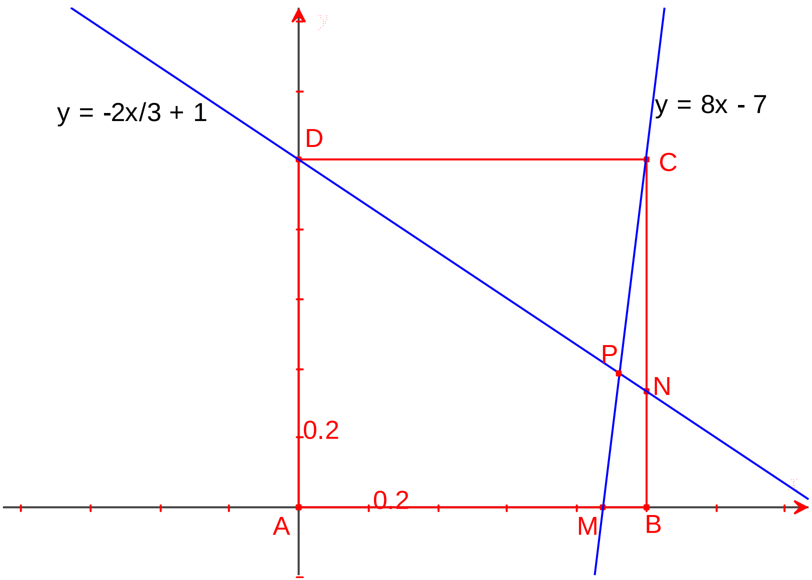
$P\left(\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13}\right)$.

Considerant la base canònica $\left\{\overrightarrow{AB}=(1,0), \overrightarrow{AD}=(0,1)\right\}$.

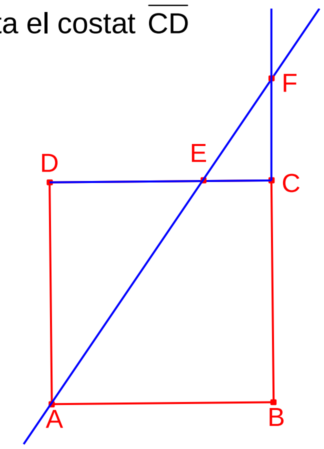
$\overrightarrow{AP}=\dfrac{12}{13}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{13}\overrightarrow{AD}$.

$13\overrightarrow{AP}=12\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$.

$\overline{AP}=\sqrt{\left(\dfrac{12}{13}\right)^2+\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=1.$



1197.- Una recta que passa pel vèrtex A d'un quadrat ABCD intersecta el costat $\overline{CD}$ en el punt E i la recta BC en el punt F.



Proveu que $\frac{1}{\overline{AE}^2}+\frac{1}{\overline{AF}^2}=\frac{1}{\overline{AB}^2}$.

Solució:

Siga $\overline{AB}=a$ costat del quadrat.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{AE}^2=a^2+\overline{DE}^2$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{FCE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

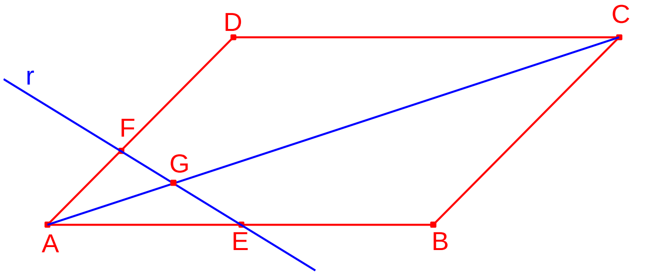
$$\frac{a}{\overline{AF}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}.$$

$$\frac{1}{\overline{AF}}=\frac{\overline{DE}}{a\cdot\overline{AE}}.$$

$$\frac{1}{\overline{AE}^2}+\frac{1}{\overline{AF}^2}=\frac{1}{\overline{AE}^2}+\left(\frac{\overline{DE}^2}{a^2\overline{AE}^2}\right)=\frac{1}{\overline{AE}^2}\left(1+\frac{\overline{DE}^2}{a^2}\right)=\frac{1}{\overline{AE}^2}\frac{a^2+\overline{DE}^2}{a^2}=\frac{1}{\overline{AE}^2}\frac{\overline{AE}^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}.$$

$$\frac{1}{\overline{AE}^2}+\frac{1}{\overline{AF}^2}=\frac{1}{\overline{AB}^2}.$$

1198.- La recta r intersecta els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ del paral·lelogram ABCD en els punts E i F, respectivament.



Siga G la intersecció de la recta r i la diagonal $\overline{AC}$.

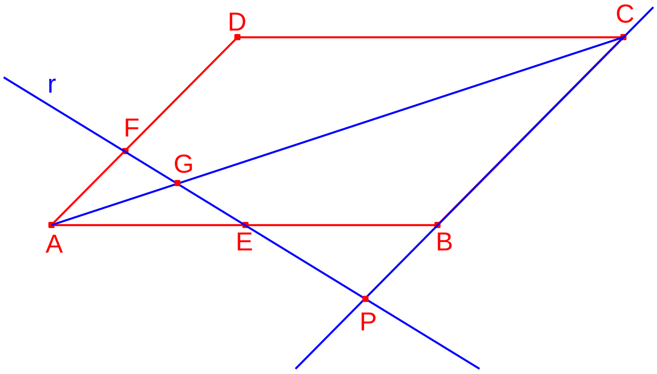
Proveu que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}$.

Solució:

Siga P la intersecció de les rectes r i BC.

Els triangles $\overset{\Delta}{AGF}$, $\overset{\Delta}{CGF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{CG}}=\frac{\overline{AF}+\overline{CP}}{\overline{AC}} \qquad (1)$$



Els triangles $\overset{\Delta}{AEF}$, $\overset{\Delta}{BEP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BE}}=\frac{\overline{AF}+\overline{PB}}{\overline{AB}}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AF}+\overline{PB}}{\overline{AF}}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AF}+\overline{PB}}{\overline{AF}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AF}+\overline{PB}+\overline{BC}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AF}+\overline{CD}}{\overline{AF}}.$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AF}+\overline{CD}}{\overline{AF}} \qquad (2)$$

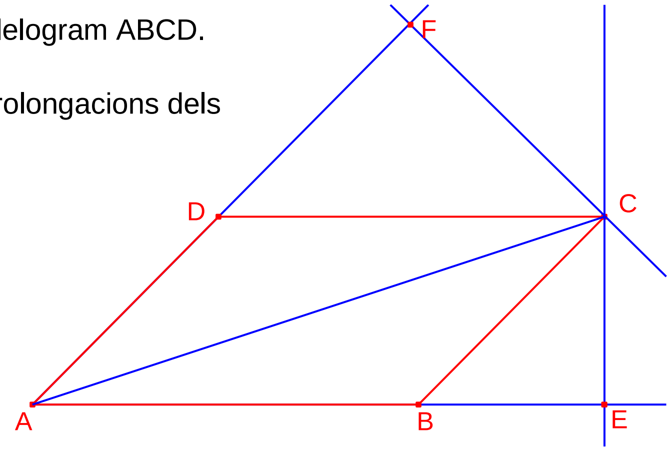
De les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AG}}.$$

1199.- Siga $\overline{AC}$ la diagonal major del paral·lelogram ABCD.

Siguen les perpendiculars $\overline{CE}$ i $\overline{CF}$ a les prolongacions dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, respectivament.

Proveu que $\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}^2$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEC}$ i $\overset{\Delta}{DFC}$, respectivament:

$$\overline{CE}^2=\overline{BC}^2-\overline{BE}^2 \qquad (1)$$

$$\overline{CF}^2=\overline{CD}^2-\overline{DF}^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEC}$ i $\overset{\Delta}{AFC}$, respectivament:

$$\overline{AC}^2=\overline{CE}^2+\overline{AE}^2.$$

$$\overline{AC}^2=\overline{CF}^2+\overline{AF}^2.$$

Sumant ambdues expressions:

$$2\cdot\overline{AC}^2=\overline{CE}^2+\overline{AE}^2+\overline{CF}^2+\overline{AF}^2 \qquad (3)$$

Substituint les expressions (1) (2) en l'expressió (3):

$$2\cdot\overline{AC}^2=\overline{BC}^2-\overline{BE}^2+\overline{AE}^2+\overline{CD}^2-\overline{DF}^2+\overline{AF}^2.$$

$$2\cdot\overline{AC}^2=\overline{BC}^2-\left(\overline{AE}-\overline{AB}\right)^2+\overline{AE}^2+\overline{CD}^2-\left(\overline{AF}-\overline{AD}\right)^2+\overline{AF}^2.$$

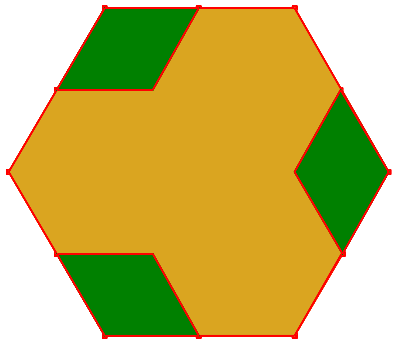
$$2\cdot\overline{AC}^2=\overline{BC}^2-\left(\overline{AE}^2-2\overline{AB}\,\overline{AE}+\overline{AB}^2\right)+\overline{AE}^2+\overline{CD}^2-\left(\overline{AF}^2-2\overline{AD}\,\overline{AF}+\overline{AD}^2\right)^2+\overline{AF}^2.$$

$$2\cdot\overline{AC}^2=2\overline{AB}\cdot\overline{AE}+2\overline{AD}\cdot\overline{AF}.$$

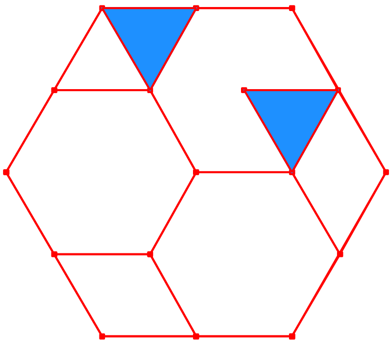
$$\overline{AB}\cdot\overline{AE}+\overline{AD}\cdot\overline{AF}=\overline{AC}^2.$$

1200.- Dividim un hexàgon regular amb tres hexàgons regular iguals i tres rombes.

Determineu la proporció entre la suma de les àrees dels rombes i dels tres hexàgons



Solució:



Cada rombe conté dos triangles equilàters.
Cada hexàgon conté 6 triangles equilàters.
La proporció entre la suma suma de les àrees dels rombes i dels tres hexàgons és:

$$\frac{S_{rombes}}{S_{hexàgons}}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 6}=\frac{1}{3}.$$