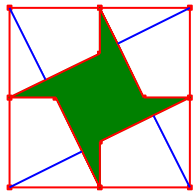
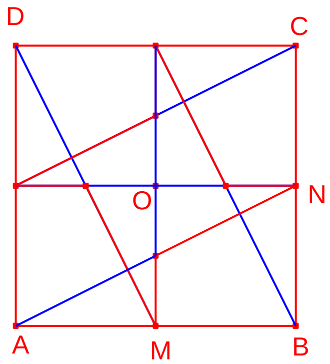
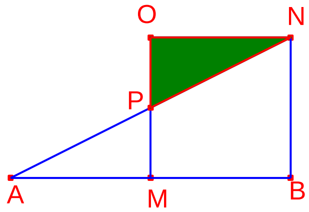
Problemes de Geometria per a l'ESO 121

1201.- Cadascun dels vèrtexs aguts de l'estel ombrejat de la figura són punts migs dels costats del quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'estel i el quadrat.



Solució:





Siga el quadrat ABCD de centre O.

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.

El motiu mínim de la tessel·la és el quadrat MBNO.

El segment $\overline{AN}$ talla el segment $\overline{OM}$ en el punt P.

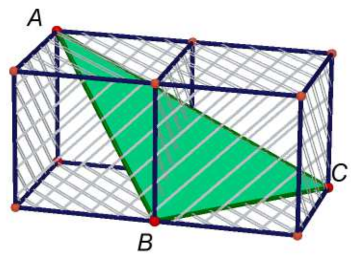
Notem que els triangles $\overset{\Delta}{AMP}$, $\overset{\Delta}{NOM}$ són iguals.

Aleshores P és el punt mig del segment $\overline{OM}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{NOM}$ és la quarta part de l'àrea del quadra MBNO.

Aleshores la proporció entre l'àrea de l'estel i el quadrat és $\frac{1}{4}$.

1202.- En la figura hi ha dos cubs iguals adossats per una cara, d'aresta 1.



Determineu d'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

$\overline{AB} = \sqrt{3}$.

$\overline{BC} = \sqrt{2}$.

$\overline{AC} = \sqrt{5}$.

Notem que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

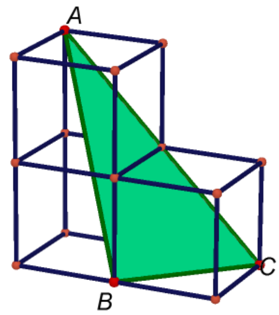
Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $B = 90^o$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Problema:

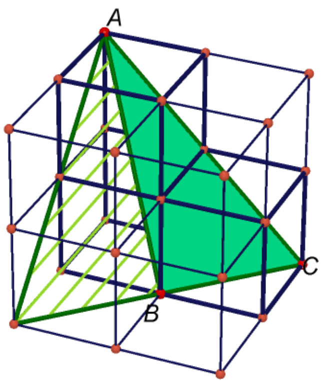
En la figura hi ha tres cubs iguals adossats per una cara, d'aresta 1.



Determineu d'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Si formem un cub d'aresta 2.

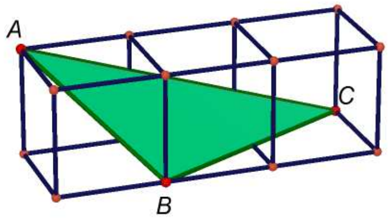


El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la meitat d'un triangle equilàter de costat $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^2\right) = \sqrt{3}.$$

1203.- En la figura hi ha tres cubs iguals adossats per una cara, d'aresta 1.



Determineu d'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

$\overline{AB} = \sqrt{3}$.

$\overline{BC} = \sqrt{5}$.

$\overline{AC} = \sqrt{10}$.

Siga $\alpha = \angle ABC$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$10 = 3 + 5 - 2\sqrt{3}\sqrt{5}\cos\alpha$.

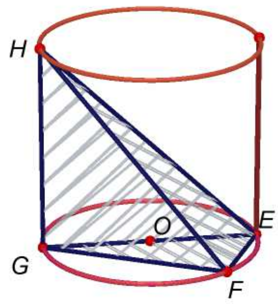
$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{210}}{15}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{5}\frac{\sqrt{210}}{15} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

1204.- En un cilindre recte s'inscriu el tetraedre EFGH tal que $\overline{EG}$ és diàmetre de la base.



Proveu que l'angle $\angle EFH$ és recte.

Solució:

Per ser angle inscrit i abraçar un diàmetre $\angle EFG = 90^{o}$.

Siga $\overline{EG} = 2r$, $\overline{GH} = h$ altura del cilindre.

Siga $\overline{FG} = a$..

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGH}$:

$$\overline{FH}^2 = a^2 + h^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFG}$:

$$\overline{EF}^2 = (2r)^2 - a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EGH}$:

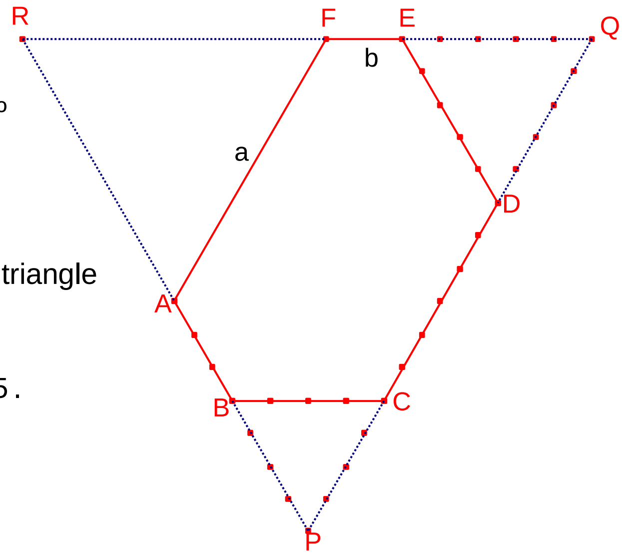
$$\overline{EH}^2 = (2r)^2 + h^2.$$

$$\overline{FH}^2 + \overline{EF}^2 = a^2 + h^2 + (2r)^2 - a^2 = \overline{FH}^2.$$

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores el triangle $\overset{\Delta}{HFE}$ és rectangle $\angle EFH = 90^{o}$.

1205.- En un hexàgon equiangular ABCDEF, $\overline{BC}=4$, $\overline{AB}=3$, $\overline{CD}=6$, $\overline{DE}=5$.

Calculeu el seu perímetre i la seua àrea.



Solució:

Siga $\overline{AF}=a$, $\overline{EF}=b$.

Els angles d'un hexàgon equiangular mesuren 120º cadascun.

Els costats oposats d'un hexàgon equiangular són paral·lels.

Si prolonguem els costats $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$, es forma el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$.

$\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CD}+\overline{DQ}=\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=4+6+5=15$.

$\overline{PR}=\overline{PB}+\overline{AB}+\overline{AR}=15$.

$4+3+a=15$.

$a=8$.

$\overline{QR}=\overline{QE}+\overline{EF}+\overline{ER}=15$.

$5+b+a=15$.

$b=2$.

El perímetre de l'hexàgon ABCDEF:

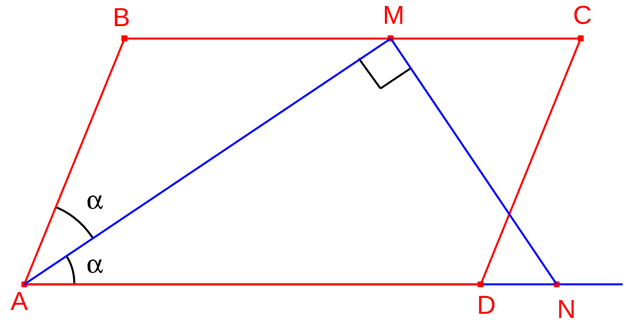
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EF}+\overline{DA}=3+4+6+5+2+8=28$.

L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és igual a l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ menys la suma de les àrees dels triangles equilàters, $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{DEQ}$, $\overset{\Delta}{AFR}$.

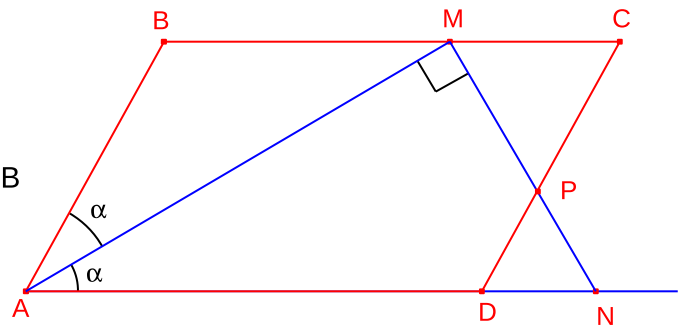
$$S_{ABCDEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}15^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}4^2+\frac{\sqrt{3}}{4}5^2+\frac{\sqrt{3}}{4}8^2\right)=30\sqrt{3}.$$

1206.- En la figura ABCD és un paral·lelogram $\overline{AD}=8$, $\overline{AB}=5$.

Calculeu $\overline{DN}$.



Solució:



Siga P la intersecció de $\overline{MN}$ i $\overline{CD}$.

$\angle ABM = 180º - 2\alpha$.

Aleshores, $\angle AMB = \alpha$. Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és isòsceles.

$\overline{BM} = \overline{AB} = 5$.

$\overline{CM} = \overline{BC} - \overline{BM} = 8 - 5 = 3$.

$\angle CMN = 180º - (\angle AMB + 90º) = 90º - \alpha$.

$\angle BCD = \angle BAD = 2\alpha$.

$\angle MPC = 180º - (\angle CMP + \angle MDP) = 180º - (90º - \alpha + 2\alpha) = 90º - \alpha$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ és isòsceles.

$\overline{CP} = \overline{CM} = 3$.

$\overline{DP} = \overline{CD} - \overline{CP} = 5 - 3 = 2$.

Els triangles $\overset{\Delta}{MCP}$, $\overset{\Delta}{NDP}$ són semblants.

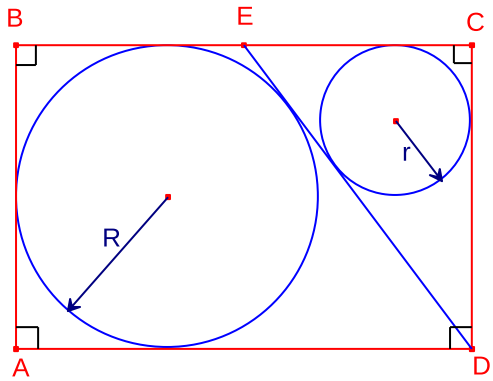
Aleshores, $\overline{DN} = \overline{DP} = 2$

1207.- En la figura ABCD és un rectangle.

Una circumferència de radi R està inscrita en el quadrilàter ABED.

Una circumferència de radi r està inscrita en el triangle $\overset{\Delta}{CDE}$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{BE}$.



Solució:

Siguen K, L M, N, P, Q punts de tangència.

$\overline{AB} = 2R$.

Siga $\overline{NE} = \overline{EP} = a$. Siga $\overline{EM} = \overline{EQ} = b$.

$\overline{BN} = \overline{AK} = R$, $\overline{CL} = \overline{MN} = r$.

$\overline{DQ} = \overline{DL} = 2R - r$.

$\overline{KD} = \overline{CN} = a + b + r$ (1)

$\overline{PQ} = \overline{EQ} - \overline{EP} = b - a$.

$\overline{KD} = \overline{DP} = \overline{DQ} + \overline{PQ} = 2R - r + b - a$ (2)

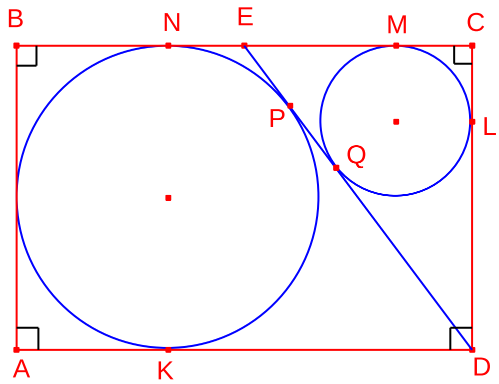
Igualant les expressions (1) (2):

$a + b + r = 2R - r + b - a$.

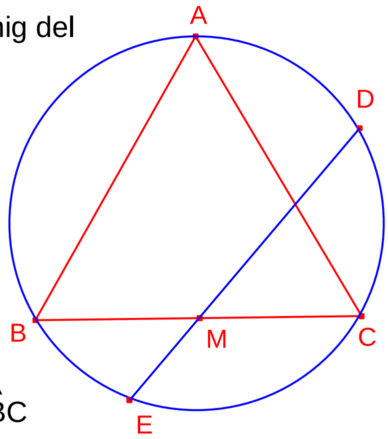
Resolent l'equació:

$a = R - r$.

$\overline{BE} = \overline{BN} + \overline{NE} = R + a = 2R - r$.



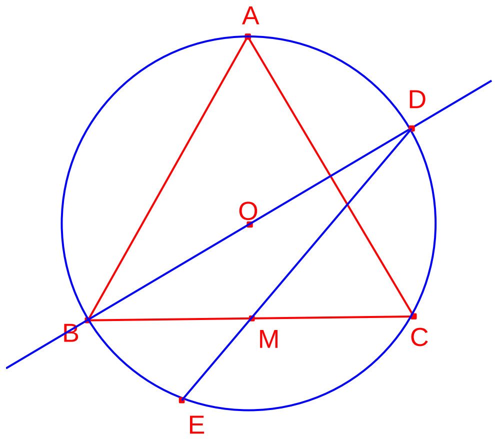
1208.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter, M és el punt mig del costat $\overline{BC}$ i D és el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{AC}$. Determineu $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{EM}}$.



Solució:

Siga O el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i R el seu radi.

Siga $\overline{DM} = x$, $\overline{EM} = y$



La recta BO passa pel punt mig de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$

$\overline{MC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$. $\overline{BC} = R\sqrt{3}$.

Aplicant la potència del punt M respecte de la circumferència:

$\overline{DM} \cdot \overline{EM} = \overline{BM} \cdot \overline{CM}$.

$xy = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$. Aleshores, $xy = \dfrac{3}{4}R^2$.

Per ser un angle inscrit en la circumferència i abraçar un diàmetre $\angle BED = 90^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEM}$:

$$\overline{BE}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + y^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BED}$:

$\overline{BE}^2 = (2R)^2 + (x+y)^2$. Igualant les dues expressions anteriors:

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + y^2 = (2R)^2 + (x+y)^2$. Simplificant:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = (2R)^2 + x^2 + 2xy.$$

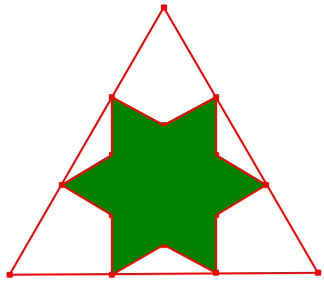
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = (2R)^2 + x^2 + 2\dfrac{3}{4}R^2$. Resolent l'equació:

$x = \dfrac{\sqrt{7}}{2}R$. Aleshores, $y = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}R$.

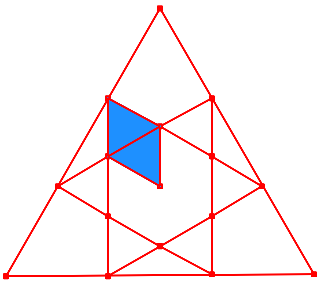
$$\frac{\overline{DM}}{\overline{EM}} = \frac{x}{y} = \frac{7}{3}.$$

1209.- En un triangle equilàter s'ha inscrit una estrella de 6 puntes.

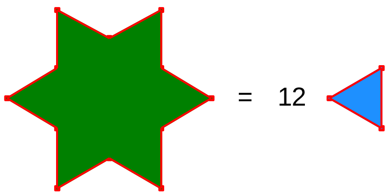
Calculeu la proporció entre l'àrea de l'estrella i l'àrea del triangle.



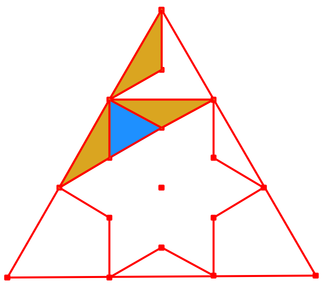
Solució:

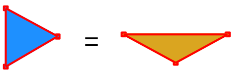


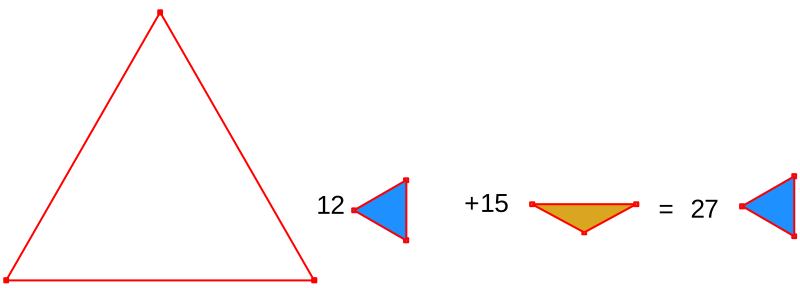
Aleshores:



Aleshores:



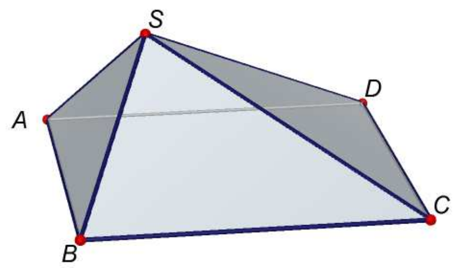




Aleshores:

La proporció entre les àrees és $\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$.

1210.- Determineu el volum d'una piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$ tal que l'àrea lateral $\overset{\Delta}{ASB}$ és un triangle rectangle en O i la cara lateral $\overset{\Delta}{CSD}$ és un triangle equilàter.

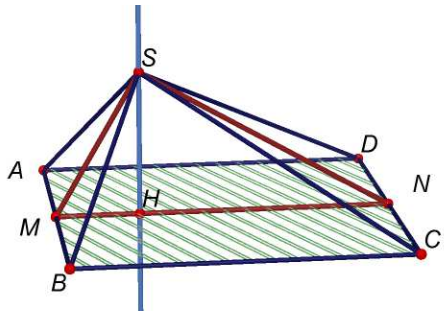


Solució:

Siguen M i N els punts migs de les arestes $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.

Com que $\overset{\Delta}{CSD}$ és un triangle equilàter la projecció H de S sobre la base ABCD pertany al segment $\overline{MN}$.

$\overline{SH}$ és l'altura de la piràmide.



El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASB}$ és isòsceles.

$\overline{SN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{SM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}a$, $\overline{MN} = \overline{BC} = a$.

Notem que $\overline{MN}^2 = \overline{SN}^2 + \overline{SN}^2$.

Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\overset{\Delta}{MNS}$ és rectangle, $\angle MSN = 90º$.

Calculant l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNS}$:

$$S_{MNS} = \frac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{SH} = \frac{1}{2}\overline{SM} \cdot \overline{SN}.$$

$$\frac{1}{2}a \cdot \overline{SH} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{SH} = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \overline{SH} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3.$$