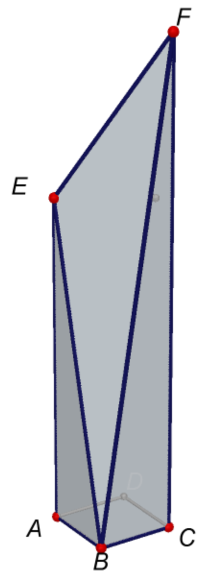
Problemes de Geometria per a l'ESO 122

1211.- El costat d'un quadrat ABCD mesura $\sqrt{2}$.

S'alcen les perpendiculars $\overline{AE}=6$, $\overline{CF}=9$ al plànol del quadrat ABCD.

Determineu el volum del sòlid ABCDEF tal que $\overline{EF}$ és una aresta de la part superior del sòlid.



Solució:

El plànol paral·lel a la base ABCD talla l'aresta $\overline{CE}$ en el punt L.

$\overline{LF}=3$.

Siga el quadrat EKLM paral·lel al quadrat ABCD.

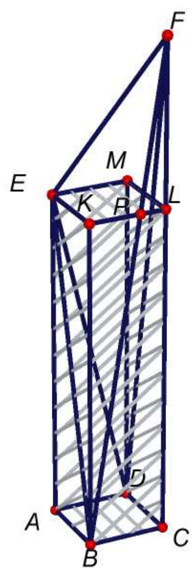
La recta BF talla el segment $\overline{KL}$ en el punt P.

La recta DF talla el segment $\overline{LM}$ en el punt Q.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCF}$, $\overset{\Delta}{PLF}$ són semblants i de raó 3:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{LP}=\frac{1}{3}\overline{LK}=\frac{\sqrt{2}}{3}$. $\overline{KP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



El volum del sòlid és igual al volum del prisma regular ABCDFKLM menys el volum de dues piràmides EKPB més el volum de la piràmide EPLQF.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{EKL}$, $\overset{\Delta}{PLQ}$:

$\overline{EL}=2$, $\overline{PQ}=\frac{2}{3}$.

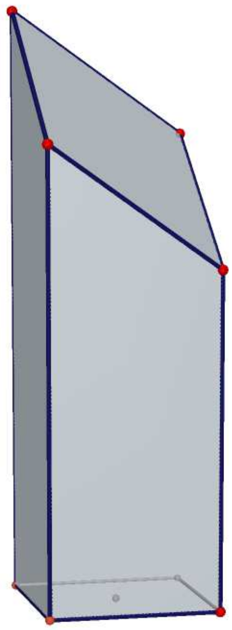
$$V_{ABCDEKLM}=\overline{AB}^2\cdot\overline{AE}=12$$

$$V_{EKPB}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\overline{EK}\cdot\overline{KP}\cdot\overline{KB}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{2\sqrt{2}}{3}6=\frac{4}{3}.$$

$$V_{EPLQF}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\overline{EL}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{LF}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}2\cdot\frac{2}{3}3=\frac{2}{3}.$$

El volum del sòlid és:

$$V=V_{ABCDEKLM}-2V_{EKPB}+V_{EPLQF}=12-2\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=10.$$



1212.- Siga un prisma quadrangular recte truncat.

La base és un quadrat de costat 3 i dues arestes laterals oposades mesuren 8.
La cara superior i la base formen un angle de 45º.
Determineu la seua àrea i el volum.

Solució:
Siga el prisma truncat ABCDA'B'C'D'.

$\overline{AB}=3$, $\overline{AA'}=\overline{BB'}=8$.

Siga O el centre del quadrat ABCD.

$\overline{BD}=\overline{A'C'}=3\sqrt{2}$, $\overline{OB}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Siga Q la intersecció dels segments $\overline{A'C'}$, $\overline{B'D'}$.
Les rectes BD, B'D' s'intersecten en el punt P.
Per hipòtesi $\angle D'PD=45º$.

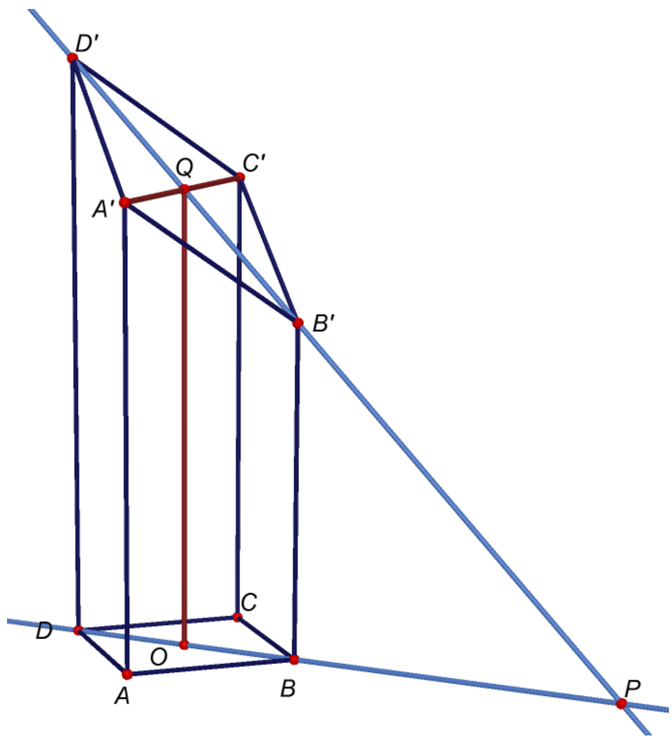
Els triangles $\overset{\Delta}{QOP}$, $\overset{\Delta}{B'BP}$, $\overset{\Delta}{D'DP}$ són rectangles i isòsceles.

$\overline{OP}=\overline{OQ}=8$.

$\overline{BB'}=\overline{OP'}-\overline{OB}$. $\overline{BB'}=8-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{DD'}=\overline{OP'}+\overline{OB}$. $\overline{DD'}=8+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{B'D'}=\left(\overline{DD'}-\overline{BB'}\right)\sqrt{2}=3\sqrt{2}\sqrt{2}=6$.



L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD}=3^2=9$.

L'àrea del trapezi ABB'A' és:

$$S_{ABB'A'}=\frac{\overline{AA'}+\overline{BB'}}{2}\overline{AB}=\frac{16-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2}3.$$

L'àrea del trapezi DAA'D' és:

$$S_{DAA'D'}=\frac{\overline{AA'}+\overline{DD'}}{2}\overline{DA}=\frac{16+\frac{3\sqrt{2}}{2}}{2}3.$$

L'àrea del cometa A'B'C'D' és: $S_{A'B'C'D'}=\dfrac{1}{2}\overline{A'C'}\cdot\overline{B'D'}=\dfrac{1}{2}3\sqrt{2}\cdot 6$.

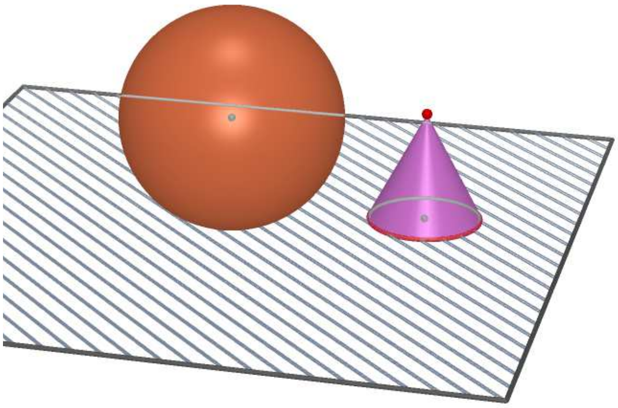
L'àrea del prisma truncat és:

$$S=S_{ABCD}+2S_{ABB'A'}+2S_{DAA'D'}+S_{A'B'C'D'}=9+\left(16-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)3+\left(16+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)3+9\sqrt{2}=105+9\sqrt{2}$$

El volum del prisma truncat és:

$$V=S_{ABCD}\left(\frac{\overline{AA'}+\overline{BB'}+\overline{CC'}+\overline{DD'}}{4}\right)=9\cdot\frac{8+8-\frac{3\sqrt{2}}{2}+8+8+\frac{3\sqrt{2}}{2}}{4}=72.$$

1213.- L'altura i el diàmetre d'un con són iguals al radi d'una esfera de volum 4.
Calculeu el volum del con.



Solució:
Siga r el radi de l'esfera.
El radi del con és $\frac{r}{2}$ i la seua altura és r.
El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 r = \frac{1}{12}\pi \cdot r^3 .$$

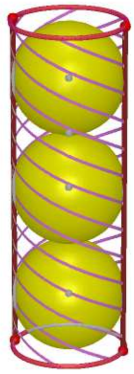
El volum de l'esfera és:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4 .$$

$\pi r^3 = 3$.
Substituint en l'expressió del volum del con:

$$V_{con} \frac{1}{12}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{12}3 = \frac{1}{4} .$$

1214.- En un pot de pilotes de tennis caben tres pilotes.



Si l’altura del pot és 20.1cm calculeu el volum del pot.

Solució:
Com en el pot caben exactament tres pilotes el radi r de les esferes (pilotes) és la sisena part de l’altura:

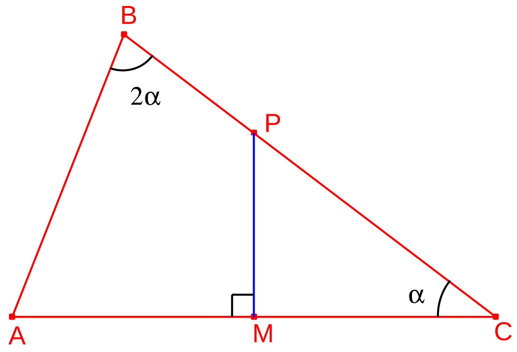
$r = \frac{20.1}{3} = 3.35\text{cm}$.

El radi de l’esfera és igual al radi del cilindre (pot).
El volum del cilindre és:

$V = \pi 3.35^2 \cdot 20.1 \approx 708.66\text{cm}^3$.

1215.- En la figura $\overline{PM}$ és mediatriu de $\overline{AC}$.

Calculeu $\overline{AB}$ si $\overline{PC} = 8$.



Solució:

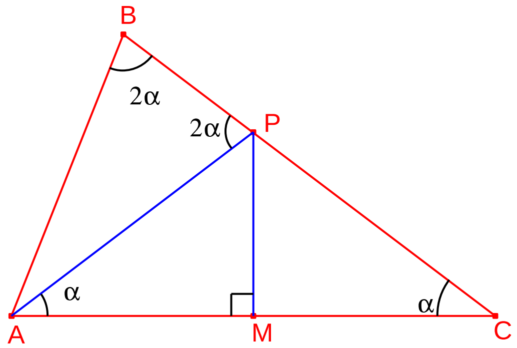
Si $\overline{PM}$ és mediatriu de $\overline{AC}$, $\overline{AP} = \overline{PC} = 8$.

Aleshores, $\angle PAC = \alpha$.

$\angle APB = \angle PAC + \angle ACP = 2\alpha$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{APB}$ és isòsceles, per tant:

$\overline{AB} = \overline{AP} = 8$.

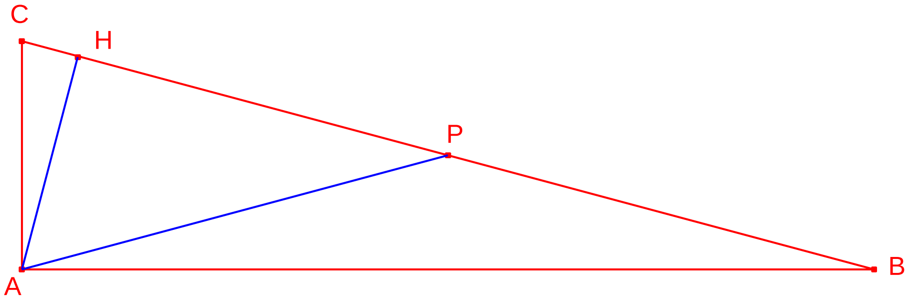


1216.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A=90^o, B=15^o, C=75^o$.

Siga $h=\overline{AH}$ altura sobre la hipotenusa.

Proveu que $\frac{h}{a}=\frac{1}{4}$.

Solució:



Siga P en la hipotenusa tal que $\angle PAB=15^o$.

$\overline{AP}=\overline{PB}$.

$\angle CAP=75^o$.

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ACP}$ és isòsceles:

$\overline{CP}=\overline{AP}=\overline{BP}$.

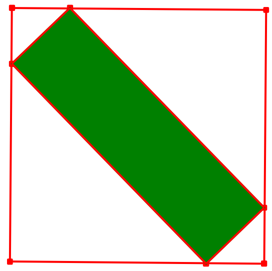
$\overline{BC}=2\overline{AP}$.

$\angle APC=60^o$, $\overset{\Delta}{AHP}$ és rectangle, aleshores:

$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AP}$.

Aleshores, $\overline{AH}=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{4}\overline{BC}$.

1217.- Dins d'un quadrat inscrivim un rectangle tal que els seus costats siguen paral·leles a les diagonals del quadrat.

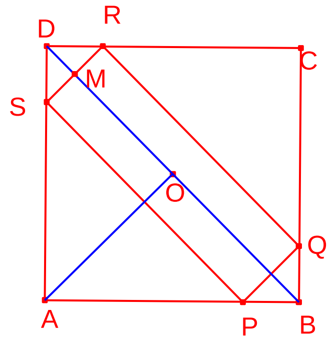


Calculeu la relació entre els perímetres del rectangle i del quadrat.

Solució:

Siga ABCD un quadrat de costat $\overline{AB}=c$.

Siga O el centre del quadrat.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AOD}$

$\overline{OD}=c\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Siga el rectangle PQRS. $\overline{PQ}=\overline{RS}=2x$, $\overline{PS}=\overline{QR}=2y$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{RS}$ del rectangle:

El triangle $\overset{\Delta}{SMD}$ és rectagnle isòsceles:

$\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{PS}=y$, $\overline{MD}=\overline{SM}=x$.

$\overline{OD}=x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}c$.

El perímetre del rectangle PQRS és:

$p_{PQRS}=4(x+y)=2\sqrt{2}c$.

El perímetre del quadrat ABCD és:

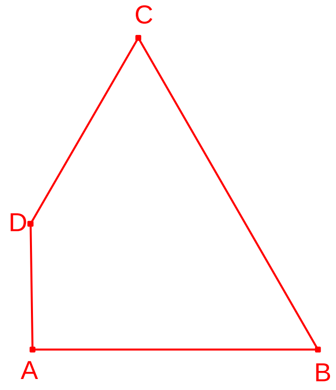
$p_{ABCD}=4c$.

La proporció entre els perímetres és:

$\dfrac{p_{PQRS}}{p_{ABCD}}=\dfrac{2\sqrt{2}c}{4c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1218.- ABCD és un quadrilàter tal que $A = 90^o$, $B = C = 60^o$.

Si $2\overline{AB} - \overline{BC} = 6\sqrt{3}$, calculeu $\overline{CD}$.



Solució:

Les rectes AB i CD es tallen en el punt P formant el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PBC}$.

Siga $\overline{BC} = 2x$.

$\overline{PC} = 2x$.

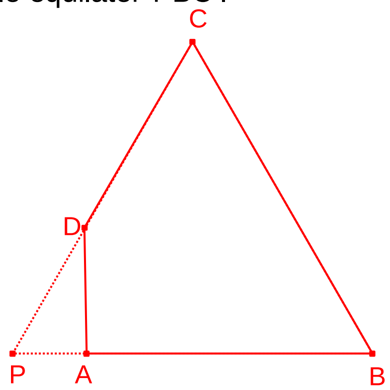
$\overline{AB} = x + 3\sqrt{3}$ ja que $2\overline{AB} - \overline{BC} = 6\sqrt{3}$.

$\overline{AP} = \overline{BC} - \overline{AB} = x - 3\sqrt{3}$.

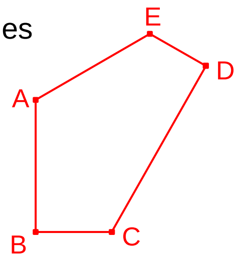
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAD}$ els seus angle són $P = 60^o$, $D = 30^o$.

$\overline{PD} = 2\overline{AP} = 2x - 6\sqrt{3}$.

$\overline{CD} = \overline{PC} - \overline{PD} = 6\sqrt{3}$.



1219.- Siga el pentàgon ABCDE tal que $B = D = 90º$ i els altres angles són iguals.



Siga $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 10$.

Calculeu la distància del vèrtex A al costat $\overline{DE}$.

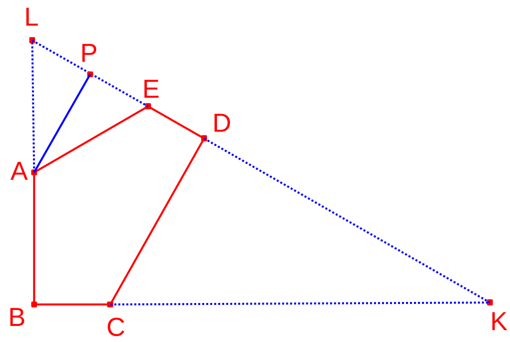
Solució:

La suma dels angles d'un pentàgon és:

$180º(5-2) = 540º$.

$A + C + E = 540º - (B + D) = 360º$.

$A = C = E = \dfrac{360º}{3} = 120º$.



Les rectes BC i DE es tallen en el punt K.

Les rectes AB i DE es tallen en el punt L.

El triangle $\overset{\Delta}{BKL}$ és rectangle, $B = 90º$, $K = 30º$, $L = 60º$.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDK}$, $D = 90º$, $K = 30º$.

$\overline{CK} = 2 \cdot \overline{CD} = 20$

$\overline{BK} = 24$.

$\overline{BL} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{BK} = 8\sqrt{3}$.

$\overline{AL} = \overline{BL} - \overline{AB} = 4\sqrt{3}$.

Siga P la projecció de A sobre la recta DE.

La distància de A al costat $\overline{DE}$ és igual a la mesura del segment $\overline{AP}$.

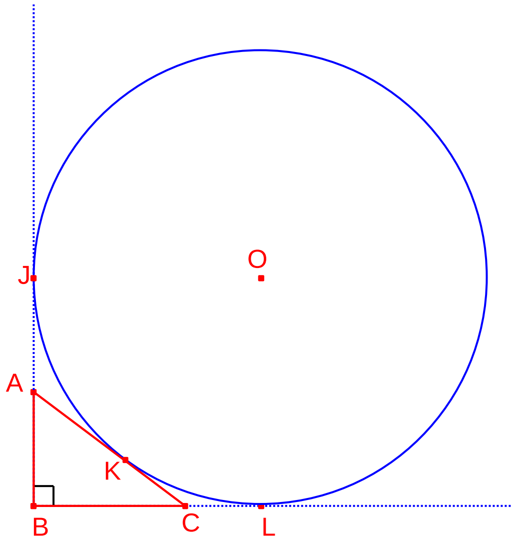
$\angle AEL = \angle EAL = 60º$.

El triangle $\overset{\Delta}{AEL}$ és equilàter.

$\overline{AP} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AL} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}4\sqrt{3} = 6$.

1220.- En la figura el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$.

J, K, L són punts de tangència de la circumferència.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}=15$.

Siga R el radi de la circumferència de centre O.
$\overline{OL}=\overline{OJ}=R$.
$\overline{BJ}=\overline{BL}=R$.

Per ser K, J punts de tangència de les rectes AJ, AK:
$\overline{AJ}=\overline{AK}$.
Per ser K, L punts de tangència de les rectes CL, CK:
$\overline{CL}=\overline{CK}$.

$R=\overline{BJ}=\overline{AB}+\overline{AJ}=\overline{AB}+\overline{AK}=9+\overline{AK}$ (1)
$R=\overline{BL}=\overline{BC}+\overline{CL}=\overline{BC}+\overline{CL}=12+\overline{CK}$ (2)
Sumant ambdues expressions:
$2R=9+\overline{AJ}+12+\overline{CK}$.
$2R=21+\overline{AK}+\overline{CK}$.
$2R=21+\overline{AC}$.
$2R=21+15=36$.
$R=18$.