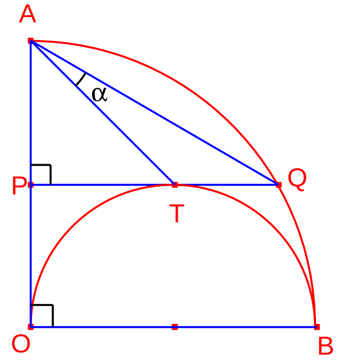
Problemes de Geometria per a l'ESO 123

1221.- En la figura el segment $\overline{PQ}$ és tangent a la semicircumferència en el punt T.
Calculeu la mesura de l'angle $\alpha = \angle TAQ$.



Solució:

Siga K el centre de la semicircumferència i $\overline{KT} = r$ el seu radi.

El radi del quadrat és $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OQ} = 2r$.

$\overline{OP} = \overline{KT} = r$, $\overline{OQ} = 2r$.

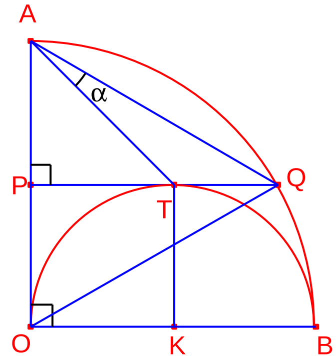
Aleshores, $\angle PQO = 30^o$.

$\overline{OP} = \overline{AP} = r$. Aleshores:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPQ}$, $\overset{\Delta}{APQ}$ són iguals.

Aleshores, $\angle PQA = \angle PQO = 30^o$.

$\angle PAO = 60^o$.



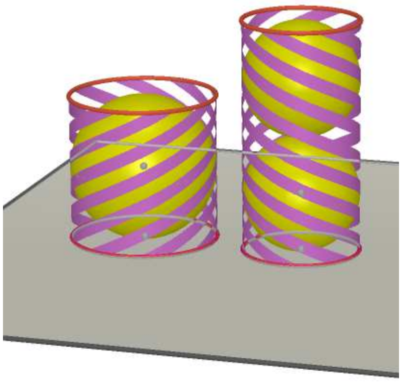
$\overline{AP} = \overline{PT} = r$.

Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{APT}$ és isòsceles. Aleshores:

$\angle PAT = 45^o$.

$\alpha = \angle TAQ = \angle PAQ - \angle PAT = 60^o – 45^o = 15^o$.

1222.- En la figura determineu la raó entre els volums dels dos cilindres, si el volum de l'esfera de major radi és igual a la suma dels volums de les altres dues esferes de menor radi.



Solució:
Siga R el radi de l'esfera gran.
El radi del cilindre que conté una esfera té radi R i altura 2R.
El seu volum és:

$$V_1 = \pi R^2 \cdot 2r = 2\pi R^3$$

Siga r el radi de les esferes menudes.
El cilindre que conté les dues esferes té radi r i altura 4r.
El seu volum és:

$$V_2 = \pi r^2 \cdot 4r = 4\pi r^3$$

El volum de l'esfera de major radi és igual a la suma dels volums de les altres dues esferes de menor radi, aleshores:

$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$. Simplificant:

$\frac{R^3}{r^3} = 2$.

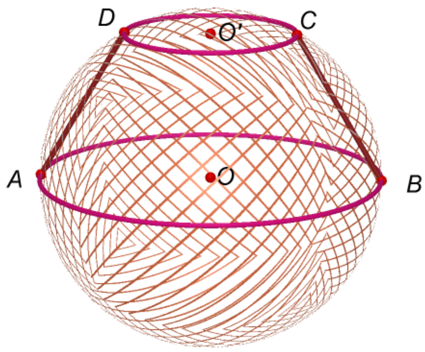
La proporció entre els volums dels dos cilindres és:

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi R^3}{4\pi r^3} = 1.$

És a dir els dos cilindres tenen el mateix volum.

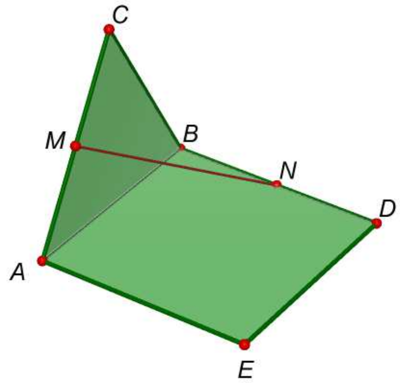
1223.- Les bases d'un tronc de con són dos cercles de radis 3 i 6.
La generatriu mesura 6.
Determineu la longitud del radi de l'esfera circumscrita al tronc de con.

La secció axial d'un tronc de con és un trapezi isòsceles.
Els costats oposats d'un trapezi isòsceles són suplementaris, aleshores els cons truncats tenen esfera circumscrita.



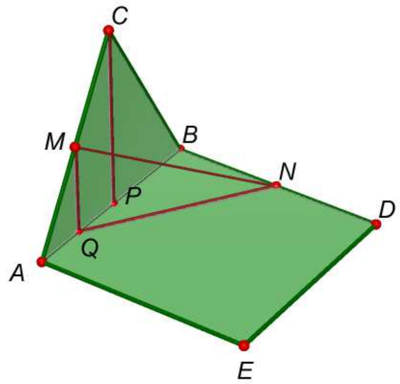
Siga ABCD el trapezi isòsceles.
$\overline{AB} = 12$, $\overline{CD} = 6$, $\overline{AD} = \overline{BC} = 6$.
Els angles del trapezi són de 60º i 120º.
El centre de l'esfera és el punt mig O del diàmetre de la base.
Aleshores el radi de l'esfera circumscrita és $\overline{OA} = 6$.

1224.- Un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ pertany a un plànol perpendicular al quadrat ABDE.
El segment que uneix el punt mig del costat $\overline{AC}$ amb el punt mig del costat $\overline{BD}$ mesura 1. Determineu la longitud del costat del triangle o del quadrat.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el quadrat ABDE tenen el mateix costat.
Siga $\overline{AB} = a$.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, respectivament.
$\overline{MN} = 1$



Siga $\overline{CP}$ l'altura del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Siga Q la projecció de M sobre el segment $\overline{AB}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{AQM}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{MQ} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$, $\overline{AQ} = \frac{1}{4}a$.

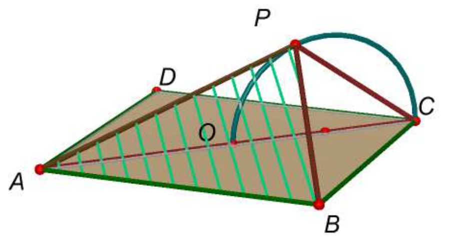
$\overline{BQ} = \frac{3}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QBN}$:

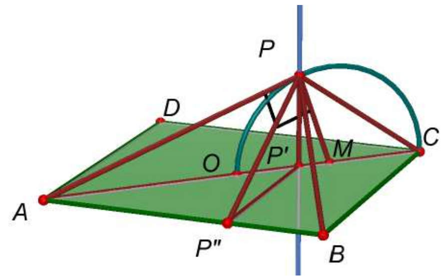
$\overline{QN} = \frac{\sqrt{13}}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQN}$:

$$1 = \overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}a\right)^2} = a.$$



1225.- Siga el quadrat ABCD de costat $\sqrt{2}$ de centre O.
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{OC}$ perpendicular al plànol del quadrat.
Tracem la tangent $\overline{AP}$.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$.



Solució:
Siga M el centre del semicercle.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 2$.
El radi del semicercle és:
$\overline{MT} = \overline{MO} = \frac{1}{2}$.
$\angle APM = 90º$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APM}$:
$\overline{AP} = \sqrt{2}$.
Siga P' la projecció de P sobre $\overline{AC}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APM}$, $\overset{\Delta}{AP'P}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PP'} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
$\overline{AP'} = \frac{4}{3}$.
Siga P" la projecció de P' sobre $\overline{AB}$:
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AP''P'}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{P'P''} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PP'P''}$:
$\overline{PP''} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és:
$$S_{APB} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{PP''} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

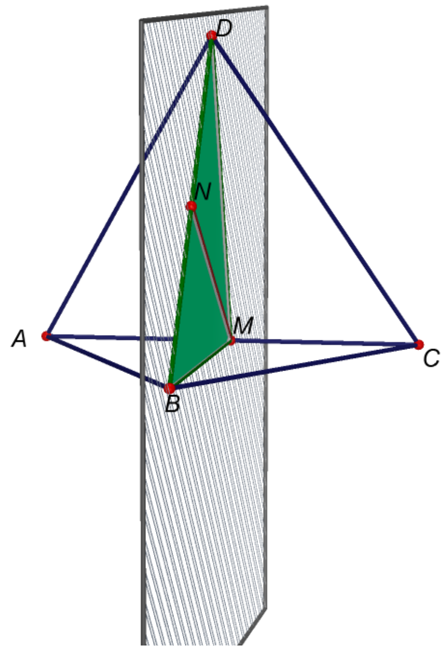
1226.- En un tetraedre regular d'aresta a determineu l'àrea de la secció que determina el plànol de simetria que conté una aresta.

Solució:

Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.

El plànol de simetria que conté l'aresta $\overline{BD}$ passa pel punt mig M de l'aresta $\overline{AC}$.

La secció que determina el plànol de simetria és el triangle $\overset{\Delta}{BMD}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

El triangle $\overset{\Delta}{BMD}$ és isòsceles.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$.

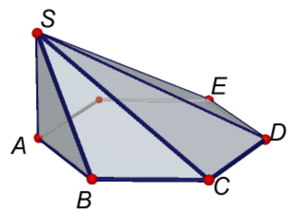
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNM}$.

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BMD}$ és.

$$S_{BMD} = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{NM} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

1227.- Una piràmide ABCDEFS de base l'hexàgon regular ABCDEF de costat a l'aresta $\overline{AS} = a$ i és perpendicular a la base.
Calculeu l'àrea i el volum.

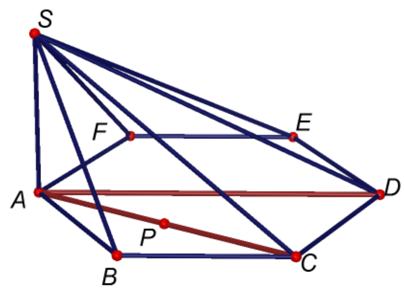


Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SAB}$:

$\overline{BS} = a\sqrt{2}$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{AC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overline{AC} = a\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SAC}$:

$\overline{CS} = 2a$.

$\overline{AD} = 2a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SAD}$:

$\overline{DS} = a\sqrt{5}$.

Siga $\alpha = \angle SBC$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCS}$:

$(2a)^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 - 2\sqrt{2}aa \cdot \cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Siga $\beta = \angle SCD$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDS}$:

$\left(a\sqrt{5}\right)^2 = (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2aa \cdot \cos\alpha$.

$\cos\beta = 0$, $\beta = 90^\circ$.

L'àrea de la piràmide ABCDEFS és:

$S_{ABCDEFS} = 2 \cdot S_{ABS} + 2 \cdot S_{BCS} + 2 \cdot S_{CDS}$.

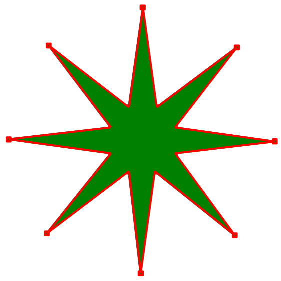
$$S_{ABCDEFS} = 2\left(\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AS}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{BS} \cdot \sin\alpha\right) + 2\left(\frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{CS}\right) + S_{ABCDEF}.$$

$$S_{ABCDEFS} = 2\left(\frac{1}{2}a^2\right) + 2\left(\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{2}a \cdot 2a\right) + 6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \left(3 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDEFS} = \frac{1}{3}S_{ABCDEF} \cdot \overline{AS} = \frac{1}{3}6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3.$$

1228.- Els costats de l'estel de 8 puntes són iguals a c i els angles formen 15º. Calculeu l'àrea de l'estel.



Solució:

L'estel està inscrit en un octògon regular ABCDEFGH.

$\angle JAK = 15^o$.

L'angle interior d'un octògon regular és:

$$\angle HAB = \frac{180^o(8-2)}{8} = 135^o.$$

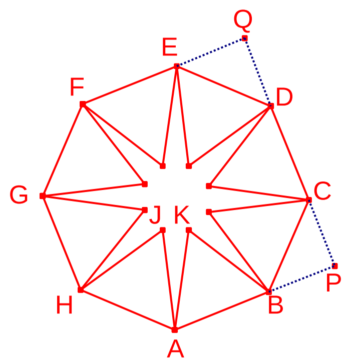
$$\angle KAB = \angle ABK = \frac{135^o - 15^o}{2} = 60^o.$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABK}$ és equilàter.

$\overline{AB} = \overline{AK} = c$.

Les rectes AB, CD és tallen en el punt P.

Les rectes FE, CD és tallen en el punt Q.



Els triangles $\overset{\Delta}{BPC}, \overset{\Delta}{DQE}$ són rectangles i isosceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{PC} = \overline{QD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

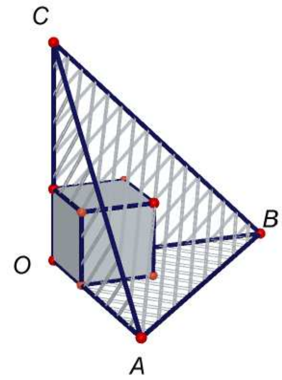
$$\overline{PQ} = \left(1+\sqrt{2}\right)c.$$

L'apotema de l'octògon regular de costat $\overline{AB}$ és:

$$\frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}c.$$

L'àrea de l'estel és igual a l'àrea de l'octògon regular de costat $\overline{AB}$ menys l'àrea de 8 triangles equlàters de costat c:

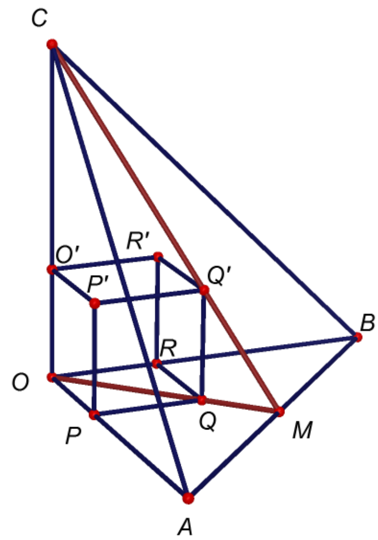
$$S_{estel} = \left(\frac{1}{2}8c\frac{1+\sqrt{2}}{2}c\right) - 8\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = 2\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)c^2.$$



1229.- Siga el triedre trirectangular OABC tal que
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 6$.
Determineu l'aresta del cub inscrit.

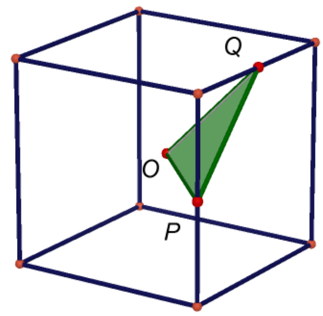
Solució:
Siga OPQRO'P'Q'R' el cub inscrit en el tetraedre OABC.
Siga $\overline{OP} = a$ aresta del cub.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OMA}$

$\overline{OM} = 3\sqrt{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$\overline{OQ} = a\sqrt{2}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{COM}$, $Q'\overset{\Delta}{QM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{6}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - a\sqrt{2}}$. Resolent l'equació:
$a = 2$.

1230.- Siga un cub d'aresta a. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$, si O és el centre del cub i P i Q punts migs de les arestes.

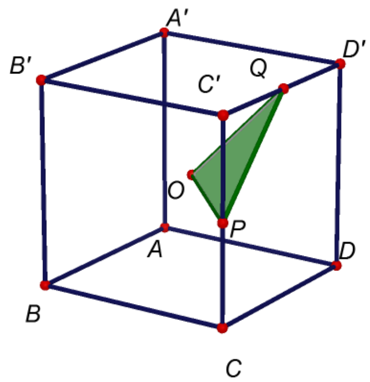


Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el cub d'aresta $\overline{AB} = a$.

La recta OP és paral·lel a la recta AC.

La recta OQ és paral·lela a la recta AC'.



$\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{AC'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{CD'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

El triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és equilàter. La seua àrea és:

$$S_{OPQ} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$