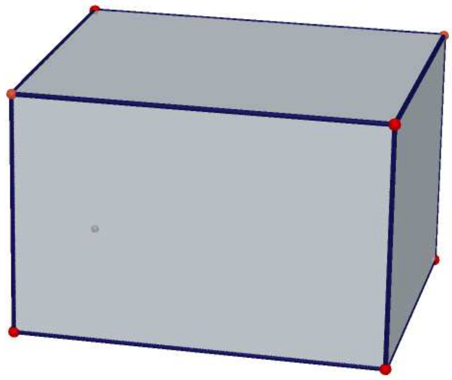
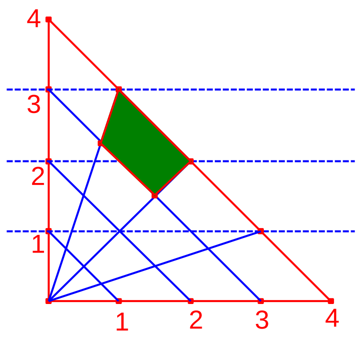
Problemes de Geometria per a l'ESO 124

1231.- Les tres dimensions d'un ortoedre formen una progressió aritmètica i sumen 45.
L'ortoedre té àrea 1332.
Calculeu les dimensions de l'ortoedre.



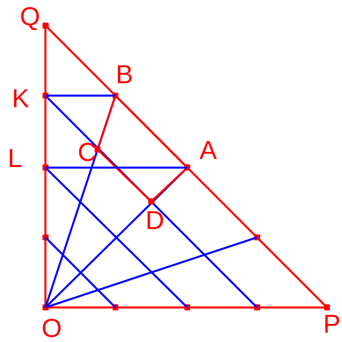
Solució:
Siguen $a-d, a, a+d$ les dimensions de l'ortoedre.
La suma de les tres dimensions és 45.
$a-d+a+a+d=45$.
$a=15$ (1)
L'àrea de l'ortoedre és 1332:
$2(a-d)a+2(a-d)(a+d)+2a(a+d)=1332$.
$3a^2-d^2=666$ (2)
Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):
$d^2=9$ (3)
Resolent l'equació
$d=-3, 3$.
Les dimensions de l'ortoedre són:
Si $d=-3$, $18, 15, 12$.
Si $d=3$, 12, 15, 18.
És el mateix ortoedre en tots dos casos.

1232.- Els catets d'un triangle rectangle isòsceles mesuren 4.
Es tracen tres paral·leles a un dels cotats (veure figura)
Calculeu l'àrea de la figura ombrejada.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$, $O = 90^o$, $\overline{OA} = \overline{OB} = 4$.
Siga ABCD el quadrilàter ombrejat.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPQ}$, $\overset{\Delta}{KBQ}$ són semblants i de raó 4:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{QB} = \frac{1}{4}\overline{PQ}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OPQ}$, $\overset{\Delta}{LAQ}$ són semblants i de raó 4:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{QA} = \frac{1}{2}\overline{PQ}.$$

Aleshores, $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$.

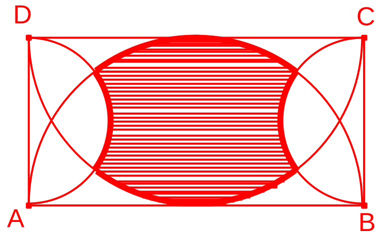
$$S_{ABO} = \frac{1}{4}S_{OPQ}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{DCO}$ són semblants i de raó 4:3.
Aplicant el teorema de Tales:

$$S_{DCO} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 S_{ABO}.$$

$$S_{ABCD} = S_{ABO} - S_{DCO} = \left(1 - \frac{9}{16}\right)S_{ABO} = \frac{7}{16}\frac{1}{4}S_{OPQ} = \frac{7}{64}S_{OPQ} = \frac{7}{64}\frac{1}{2}4 \cdot 4 = \frac{7}{8}.$$

1233.- Si el perímetre del rectangle ABCD és 180 indiqueu el perímetre de la regió ratllada.



Solució:

Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$, centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{AD}$, centre del semicercle de diàmetre $\overline{AD}$.

Siga r el radi del semicercle de diàmetre $\overline{AD}$.

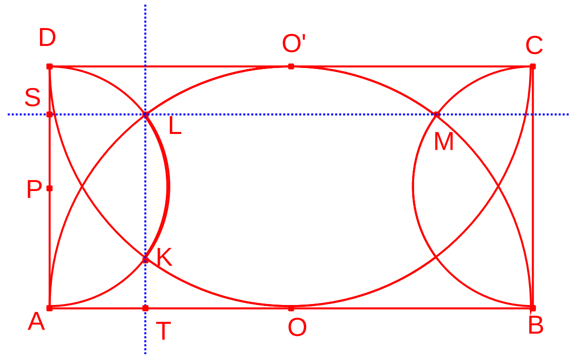
El radi del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ és 2r.

Aleshores, $\overline{AD}=2r$, $\overline{AB}=4r$.

el perímetre del rectangle ABCD és 180:

$2(4r)+2(2r)=180$. Resolent l'equació:

$r=15$.



Els dos semicercles anteriors s'intersecten en el punt L.

Siga S la projecció de L sobre el costat $\overline{AD}$.

Siga T la projecció de L sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga $\overline{AT}=\overline{SL}=x$, $\overline{TL}=\overline{AS}=y$.

$\overline{OT}=30-x$, $\overline{PS}=y-15$.

.Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PSL}$:

$15^2=x^2+(y-15)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTL}$:

$30^2=y^2+(30-x)^2$.

Considerant el sistema format per les dues equacions:

$\begin{cases} x^2+y^2-30y=0 \\ x^2+y^2-60x=0 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=12 \\ y=24 \end{cases}$.

$\overline{DS}=30-y=6$.

$\overline{LM}=60-2x=36$, $\overline{LK}=30-2\overline{DS}=18$.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{LOM}$, $\overset{\Delta}{LPK}$ són semblants i de raó 2:1.

Siga $\alpha=\angle LOM=\angle LPK$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{LOM}$:

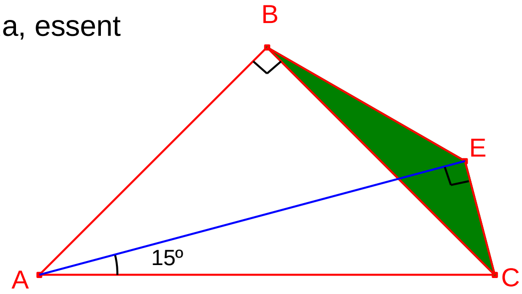
$36^2=30^2+30^2-2\cdot 30\cdot 30\cdot\cos\alpha$.

$\cos\alpha=\frac{7}{25}$. $\alpha=\arccos\frac{7}{25}\approx 73^{o}44'23''$

El perímetre de la figura és igual a la suma de doble dels arcs $\overset{\frown}{LO'M}$, $\overset{\frown}{LK}$:

$$p = 2\left(2\pi 15\frac{\alpha}{360^{\circ}}\right) + 2\left(2\pi 30\frac{\alpha}{360^{\circ}}\right) = \frac{\pi}{2}\alpha \approx 115.83\,,$$

1234.- En la figura, calculeu l'àrea de la regió ombrejada, essent $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\sqrt{2}$, $\angle ABC = \angle AEC = 90^{\circ}$, $\angle EAC = 15^{\circ}$.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles.

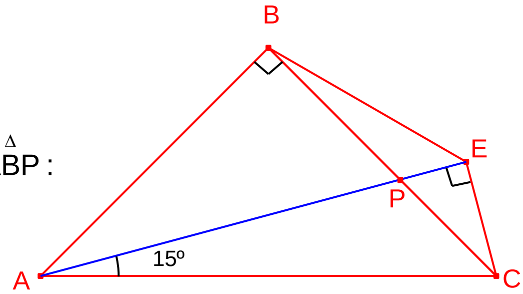
$\angle BAC = \angle BCA = 45^{\circ}$.

Aleshores, $\angle BAC = 30^{\circ}$.

Siga P el punt intersecció dels segments $\overline{AE}$, $\overline{BC}$.

$\angle APB = \angle EPC = 60^{\circ}$.

$\angle PCE = 30^{\circ}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$\overline{AP} = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \quad \overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{PC} = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}.$$

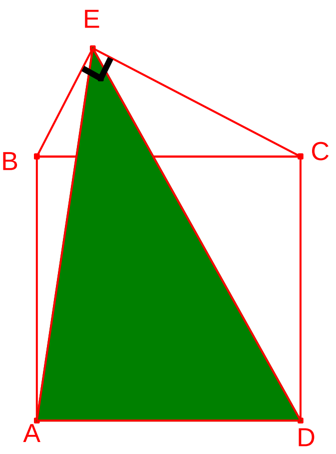
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PEC}$:

$$\overline{CE} = \overline{PC}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és:

$$S_{BCE} = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CE}\cdot\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}2\sqrt{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\frac{1}{2} = \sqrt{3} - 1.$$

1235.- En la figura determineu l'àrea de la regió ombrejada sabent que ABCD és un quadrat, $\angle BEC = 90^o$, $\overline{BE} = a$, $\overline{EC} = b$ i $a^2 + b^2 + ab = 5$.



Solució:

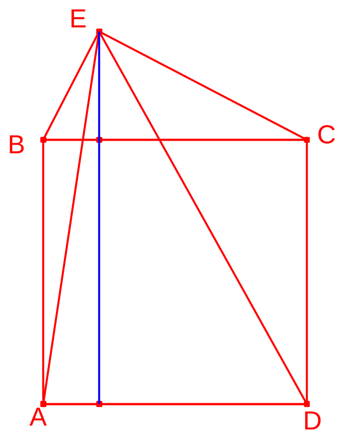
Siga $\overline{BC} = c$ costat el quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEC}$:

$c^2 = a^2 + b^2$.

Per hipòtesi, $a^2 + b^2 = 5 - ab$.

$c = \sqrt{5 - ab}$.



Siga h l'altura sobre la hipotenusa del triangle $\overset{\Delta}{BEC}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEC}$ és:

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch.$$

$$h = \frac{ab}{c}.$$

$$h = \frac{ab}{\sqrt{5 - ab}}.$$

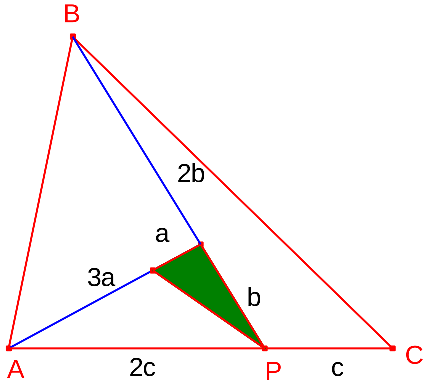
L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ sobre la base $\overline{AD}$ és:

$$c + h = \sqrt{5 - ab} + \frac{ab}{\sqrt{5 - ab}}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\overline{AD}\left(\sqrt{5 - ab} + \frac{ab}{\sqrt{5 - ab}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{5 - ab}\left(\sqrt{5 - ab} + \frac{ab}{\sqrt{5 - ab}}\right) = \frac{5}{2}.$$

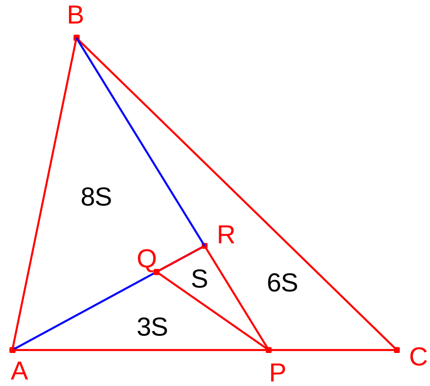
1236.- Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 36 calculeu l'àrea de la Regió ombrejada.



Solució:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga el triangle ombrejat $\overset{\Delta}{PQR}$ i S la seua àrea.



Els triangles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{AQP}$ tenen la mateixa altura sobre la base AR:

$S_{AQP} = 3S$.

$S_{ARP} = 4S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ARQ}$, $\overset{\Delta}{ARB}$ tenen la mateixa altura sobre la base PB:

$S_{ARB} = 2S_{ARP} = 8S$.

$S_{APB} = 12S$.

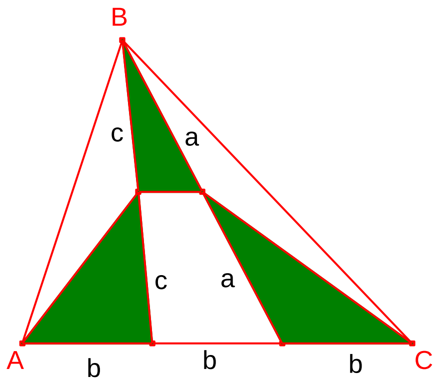
Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{PCB}$ tenen la mateixa altura sobre la base AC:

$S_{PCB} = \frac{1}{2} S_{APB} = 6S$.

$S_{ABC} = 18S = 36$.

$S = 2$.

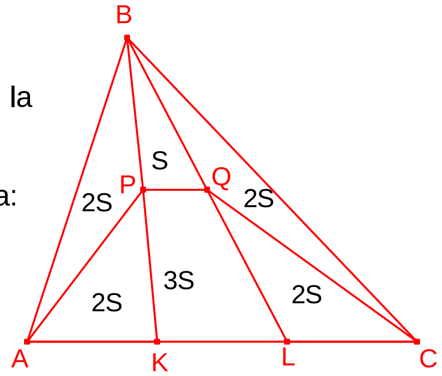
1237.- L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 24.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga l'àrea $S_{PQB} = S$.

$\overline{PQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{KLB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PQB}$, $\overset{\Delta}{KLB}$ són semblants i de raó 1:2. La proporció de les àrees és el quadrat de la proporció. Aleshores:



$S_{KLB} = 2^2 \cdot S_{PQB} = 4S$.

Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea.

Els triangles $\overset{\Delta}{AKB}$, $\overset{\Delta}{KLB}$ tenen la mateixa base i la mateixa altura:

$S_{AKB} = S_{KLB} = 4S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AKP}$, $\overset{\Delta}{APB}$ tenen la mateixa base i la mateixa altura:

$S_{AKP} = \frac{1}{2} S_{AKB} = 2S$.

Anàlogament:

$S_{LCQ} = \frac{1}{2} S_{LCB} = 2S$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

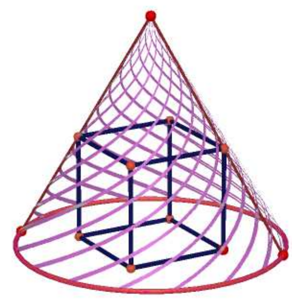
$S_{ABC} = 12S = 24$.

$S = 2$.

L'àrea de la zona ombrejada és:

$S_{omb} = S_{PQB} + S_{AKP} + S_{LCQ} = S + 2S + 2S = 5S = 10$.

1238.- Calculeu l'aresta del cub inscrit en un con equilàter de radi r (la generatriu és igual al diàmetre de la base).

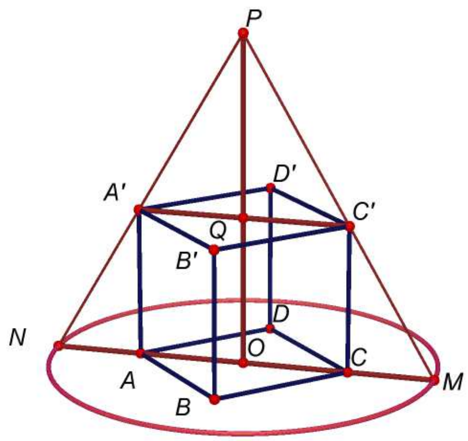


Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el cub inscrit en el con.

Siga $\overline{AB}=a$ la seua aresta.

Siga $\overline{MN}=2r$ el diàmetre del con que passa per A, C.



Siga P el vèrtex del con.

Considerem la secció del con que forma el plànol que passa per M, N, P.

$\overline{NP}=2r$

Siga O el centre de la circumferència base,

Siga Q el punt mig de $\overline{A'C'}$:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'QP}$:

$\overline{A'Q}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. $\overline{A'P}=a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NAA'}$:

$\overline{NA'}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{NA}=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$.

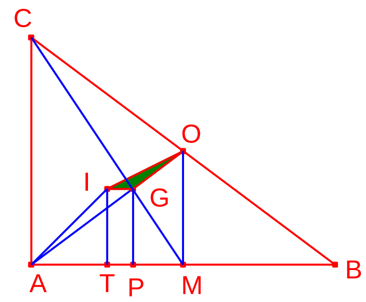
$\overline{A'Q}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\overline{AA'}=a$.

$$\overline{NP}=\overline{NA'}+\overline{A'P}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\right)a.$$

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}\right)a=2r$. Resolent l'equació:

$a=\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)r$.

1239.- Siga el triangle de costats 12, 16, 20.
Determineu l'àrea del triangle format pel circumcentre el baricentre i el incentre del triangle anterior.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a=25$, $b=12$, $c=16$.

Notem que $a^2=b^2+c^2$, aplicant el teorema invers de Pitàgores.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $A=90^o$.
En un triangle rectangle el circumcentre O és el punt mig de la hipotenusa.

$\overline{AO}=\overline{OA}=\frac{20}{2}=10$.

Siga G el baricentre.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant la propietat del baricentre $\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{CM}$

Siga I l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga T la projecció de I sobre el catet $\overline{AB}$.
El radi de la circumferència inscrita és:

$\overline{IT}=\overline{AT}=\frac{b+c-a}{2}=4$.

Siga P la projecció de G sobre el catet $\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CAM}$, $\overset{\Delta}{GPM}$ són semblants i la raó és 3:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{GP}=\frac{1}{3}\overline{CA}=4$, $\overline{AP}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{16}{3}$,

Notem que $\overline{IG}$ és paral·lel al catet $\overline{AB}$.

$\overline{IG}=\overline{AP}-\overline{AT}=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$.

$\overline{OM}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores:

$\overline{OM}$ és perpendicular al catet $\overline{AB}$ i a més a més, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{CA}=6$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{IGO}$ sobre la base $\overline{IG}$ és $h=\overline{OM}-\overline{IT}=6-4=2$.

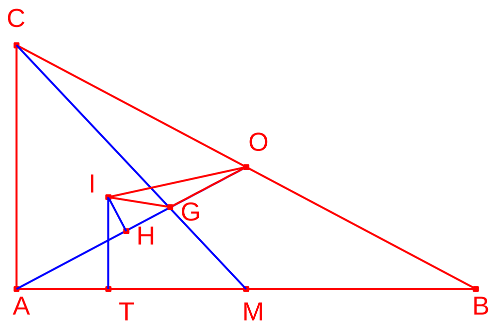
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IGO}$ és:

$S_{IGO}=\frac{1}{2}\overline{IG}\cdot h=\frac{1}{2}\frac{4}{3}2=\frac{4}{3}$.

1240.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
Determineu l'àrea del triangle format pel circumcentre el baricentre i el incentre del triangle anterior en funció dels catets.

Solució:
Suposem que $b \le c$
En un triangle rectangle el circumcentre O és el punt mig de la hipotenusa.

$\overline{AO} = \overline{OA} = \dfrac{a}{2}$.



Siga I l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T la projecció de I sobre el catet $\overline{AB}$.
El radi de la circumferència inscrita és:

$\overline{IT} = \overline{AT} = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ATI}$:

$\overline{AI} = (b+c-a)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Siga G el baricentre.

Aplicant la propietat del baricentre $\overline{GO} = \dfrac{1}{3}\overline{AM} = \dfrac{a}{6}$.

Siga H la projecció de I sobre la mitjana $\overline{AO}$

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{IGO}$ sobre la base $\overline{GO}$ és $h = \overline{IH}$.

$\angle IAH = 45^o – B$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHI}$:

$$\overline{HI} = \overline{AI}\sin(45^o – B) = (b+c-a)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{c}{a} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b}{a}\right) = \frac{(b+c-a)(c-b)}{2a}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IGO}$ és:

$$S_{IGO} = \frac{1}{2}\overline{GO}\cdot h = \frac{1}{2}\frac{a}{6}\frac{(b+c-a)}{2a} = \frac{1}{24}(b+c-a)(c-b).$$

Aleshores l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IGO}$ en funció dels catets és:

$$S_{IGO} = \frac{1}{24}\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)|c-b|.$$