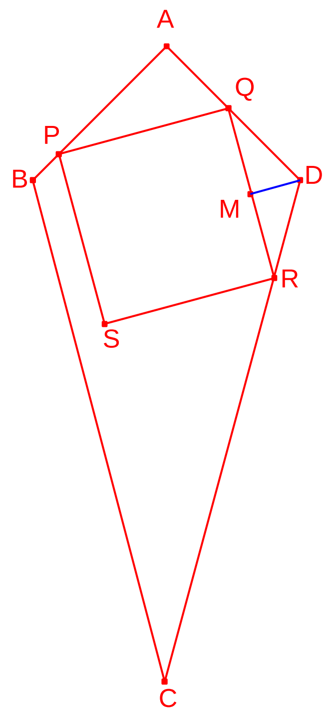
Problemes de Geometria per a l'ESO 125

1241.- L'angle d'un cometa és recte i l'oposat és 30º.
La mesura del costat menut és 10cm.
Calculeu la mesura del costat que té tres vèrtexs en en tres costats del cometa i té un costat paral·lel al costat major del cometa..
KöMaL, C1234. Maig 2014

Solució:

Siga el cometa ABCD, $A = 90^{o}, C = 30^{o}$.



$B = D = 120^{o}$.

$\angle BDC = 75^{o}$.

$\overline{BD} > \overline{AB}$.

$\overline{BC} > \overline{BD}$.

Aleshores el costat menor és $\overline{AB} = \overline{AD} = 10$.

Siga el quadrat PQRS tal que P, Q, R pertanyen als costats $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, respectivament i $\overline{PS}$ paral·lel a $\overline{BC}$.

Siga $\overline{PQ} = c$ costat del quadrat.

Notem que $\angle APQ = \angle DQR = \angle QRD = 30^{o}$.

$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2}c$.

$\overline{QD} = 10 - \frac{c}{2}$.

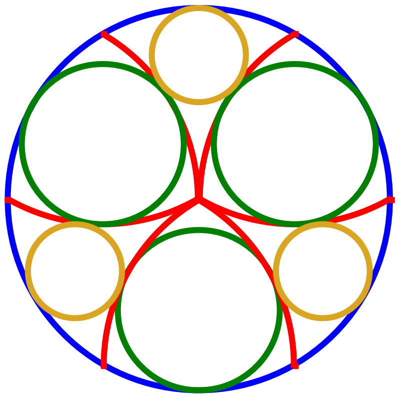
Siga M el punt mig del costat $\overline{QR}$.

$\overline{QM} = \frac{1}{2}c$, $\overline{QM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{QD} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(10 - \frac{c}{2}\right)$.

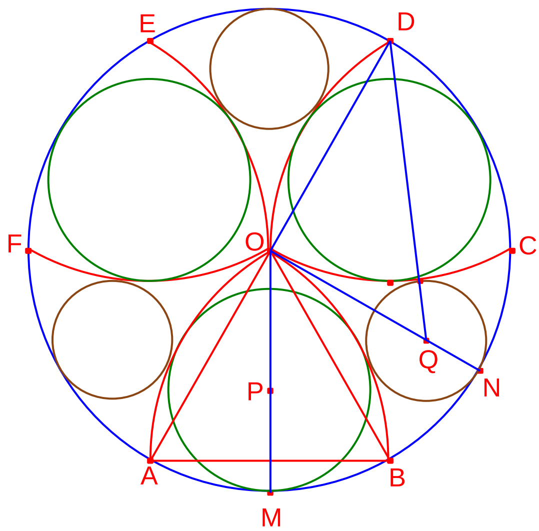
$\frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(10 - \frac{c}{2}\right)$. Resolent l'equació:

$c = 40\sqrt{3} - 60 \approx 9.28cm$.

1242.- El rosetó de l'església St. Mary the Virgin de Boyton, Anglaterra està format per una circumferència exterior i 6 circumferències tangents a 6 arcs (veure figura).
Si el radi de la circumferència exterior és r.
Determineu el radi de les circumferències interiors.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència exterior.
Els 6 arcs iguals de la circumferència exterior són els vèrtexs d'un hexàgon regular.
Siga ABCDEF l'hexàgon.



Siga M el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

El centre P de la circumferència tangent a l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

P és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AB} = r$.
Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3} r.$$

El radi de la circumferència és:

$$\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP} = r - \frac{\sqrt{3}}{3} r = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) r.$$

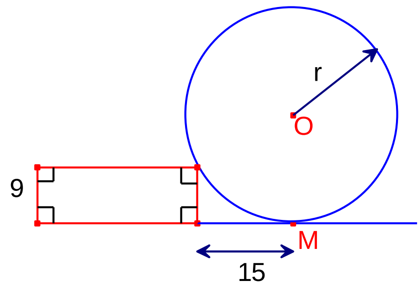
Siga N el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.
$\angle NOD = 90^{o}$.

Siga Q el centre de la circumferència tangent a l'arc $\overset{\frown}{BC}$.
Siga $s = \overline{QN}$ el seu radi.
$\overline{OQ} = r - s$, $\overline{QD} = r + s$, $\overline{OD} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOQ}$:
$(r+s)^2 = r^2 + (r-s)^2$. Resolent l'equació:

$s=\frac{1}{4}r$.

1243,. En la figura calculeu el radi de la circumferència.
(M és punt de tangència).



Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
La recta OP talla el costat del rectangle en el punt Q.
Siga $\overline{QN}=x$.

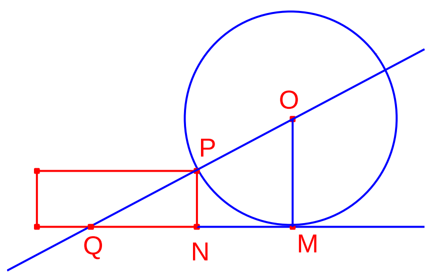
Aplicant el teorema e Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QNP}$:

$\overline{PQ}=\sqrt{x^2+9^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QNP}$, $\overset{\Delta}{QNP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PN}}{\overline{QN}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{QN}}$, $\frac{9}{x}=\frac{r}{x+15}$.

$\frac{\overline{PQ}}{\overline{NM}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{QN}}$, $\frac{r}{15}=\frac{\sqrt{x^2+81}}{x}$.

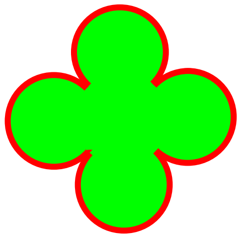


Considerem el sistema format per ambdues equacions:

$\begin{cases}\frac{9}{x}=\frac{r}{x+15}\\ \frac{r}{15}=\frac{\sqrt{x^2+81}}{x}\end{cases}$. Resolent el sistema:

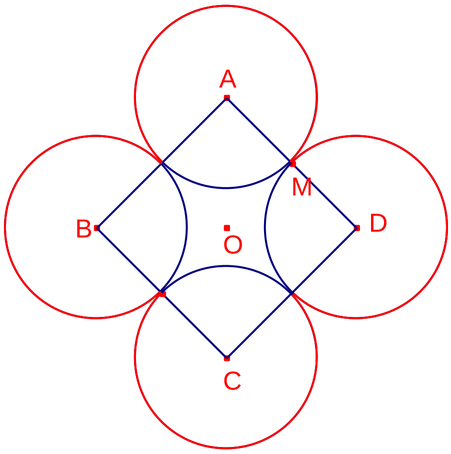
$\begin{cases}x=\frac{135}{8}\\ r=17\end{cases}$.

1244.- Siguen 4 arcs iguals de circumferència tangents dos a dos (veure figura)de radi r.
Calculeu el seu perímetre i l'àrea que formen.



Solució:
El perímetre és igual a la suma de quatre arcs de 270º (tres quartes parts de circumferència) i radi r:

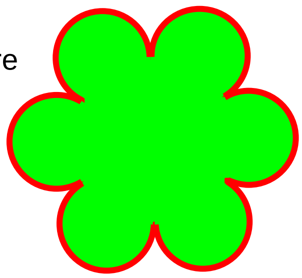
$$P = 4\left(\frac{3}{4}2\pi r\right) = 6\pi r\ .$$



L'àrea és la suma de quatre sectors de 270º i radi r i un quadrat ABCD de costat 2r:

$$S = 4\left(\frac{3}{4}\pi r^2\right) + (2r)^2 = (4+3\pi)r^2\ .$$

Problema 2
Siguen 6 arcs iguals de circumferència tangents dos a dos (veure figura) de radi r.
Calculeu el seu perímetre i l'àrea que formen.



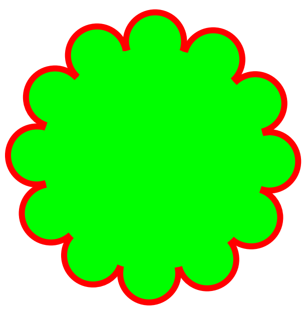
Solució:
El perímetre és:

$$P = 6\left(\frac{2}{3}2\pi r\right) = 8\pi r\ .$$

L'àrea és:

$$S = 6\left(\frac{2}{3}\pi r^2\right) + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(3\sqrt{3}+4\pi\right)r^2\ .$$

Problema 3 (generalització)
Siguen n arcs iguals de circumferència tangents dos a dos (veure figura) de radi r.
Calculeu el seu perímetre i l'àrea que formen.

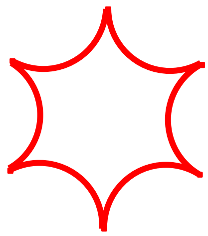


Solució:

$$P = (n+2)\pi r\ .$$

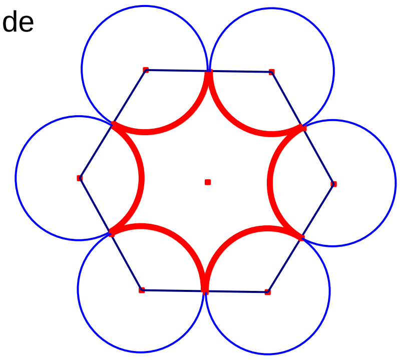
$$S = \left(n\cdot \mathrm{ctg}\frac{180º}{n} + \frac{n+2}{n}\pi\right)r^2\ .$$

1245.- Siguen 6 arcs iguals de circumferència tangents dos a dos (veure figura) de radi r.
Calculeu el seu perímetre i l'àrea que formen.



Solució:
El perímetre és igual a la suma de sis arcs de 120º (un terç de circumferència) i radi r:

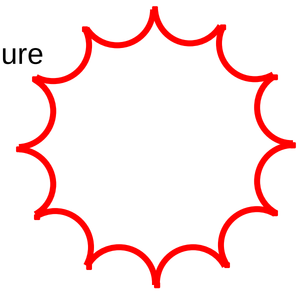
$$P = 6\left(\frac{1}{3}2\pi r\right) = 4\pi r .$$



L'àrea és igual a l'àrea d'un hexàgon regular de costat 2r menys la suma de sis sectors de 120º i radi r:

$$S = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2\right) - 6\left(\frac{1}{3}\pi r^2\right) = \left(6\sqrt{3} - 2\pi\right)r^2 .$$

Problema 2 (generalització)
Siguen n arcs iguals de circumferència tangents dos a dos (veure figura) de radi r.
Calculeu el seu perímetre i l'àrea que formen.

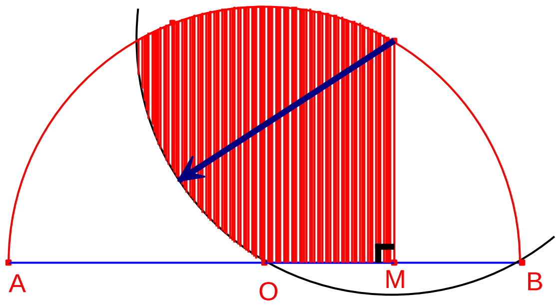


Solució:

$$P = (n-2)\pi r .$$

$$S = \left(n \cdot \mathrm{ctg}\frac{180^\circ}{n} - \frac{n-2}{2}\pi\right)r^2 .$$

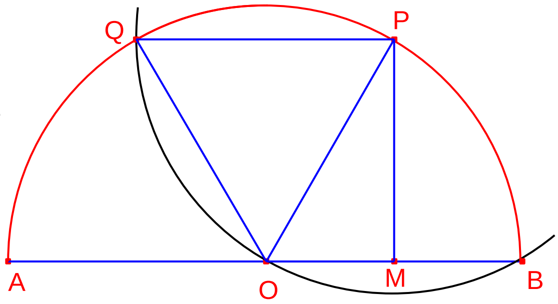
1246.- En la figura $\overline{OM} = \overline{MB}$ i $\overline{OA} = \overline{OB} = r$.
Determineu l'àrea de la zona ratllada.



Solució:
$\overline{PO} = \overline{PQ} = r$.

El triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és equilàter.

$\overline{OM} = \overline{MB} = \frac{1}{2}r$.



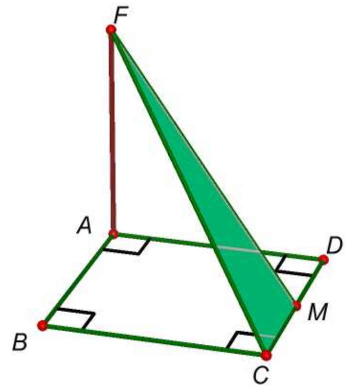
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

L'àrea ratllada és la suma de les àrees de dos segments circulars de radi r i 60º, un triangle equilàter de costat r i un triangle rectangle de catets $\overline{OM} = \frac{1}{2}r$, $\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S = 2\left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}r\frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{1}{24}\left(8 - 3\sqrt{3}\right)r^2.$$

1247.- En el gràfic $\overline{AF}$ és perpendicular al plànol del quadrat ABCD.
Si $\overline{AB} = \overline{BF} = \overline{BC} = a$ i M és el punt mig del costat $\overline{BD}$.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMF}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DAF}$:
$\overline{DF} = a\sqrt{2}$.

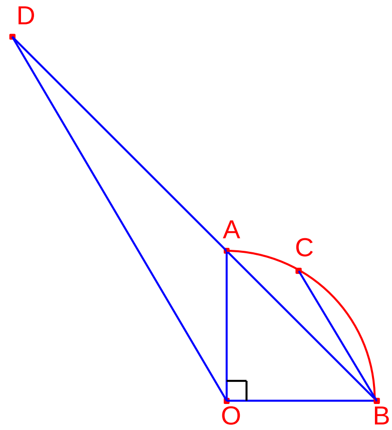
D pertany al plànol que forma el triangle $\overset{\Delta}{CMF}$.
$\overline{DF}$ és perpendicular a $\overline{CD}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMF}$ és igual a la meitat de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDF}$:

$$S_{CNF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{DF}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 .$$

1248.- Al dibuix els segments $\overline{BC}$, $\overline{OD}$ són paral·lels i $\overline{OD} = 2\overline{AB}$.

Si $\overline{AD} = 4$ determineu $\overline{BC}$ i $\overline{OB}$.



Solució:

$\angle ABA = \angle OAB = 45^{o}$.

Per ser $\overline{BC}$, $\overline{OD}$ són paral·lel:

$\angle ODA = \angle ABC$.

Per ser C angle inscrit en una circumferència i abraçar 270º:

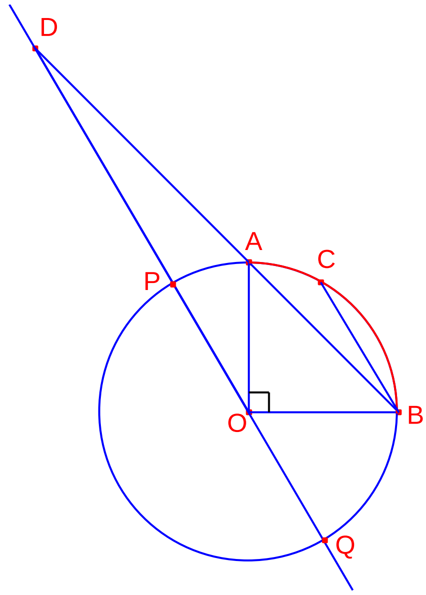
$\angle ACB = 135^{o}$.

$\angle OAD = 180^{o} - \angle OAB = 135^{o}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ODA}$ són semblants i de raó $\overline{AB} : \overline{OD} = 1 : 2$.

Aplicant el teorema de tales:

$\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 2$.



Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{AB} = r\sqrt{2}$.

$\overline{OD} = 2\overline{AB} = 2r\sqrt{2}$

La recta OD talla la circumferència en els punts P, Q.

Aplicant la potència de D respecte de la circumferència:

$\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DP} \cdot \overline{DQ}$.

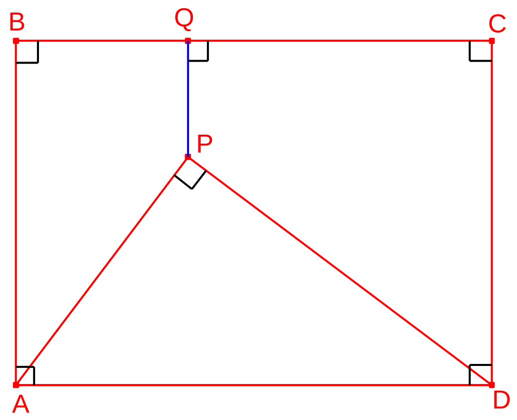
$4\left(4 + r\sqrt{2}\right) = \left(2r\sqrt{2} - r\right)\left(2r\sqrt{2} + r\right)$.

Resolent l'equació:

$r = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{30}}{7}$.

1249.- A la figura $\overline{BQ}=\frac{9}{2}$, $\overline{QC}=8$.

Calculeu $\overline{PD}$.



Solució:

Siga $\overline{PH}=h$ l'altura del triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$.

$\overline{AH}=\frac{9}{2}$, $\overline{HD}=8$.

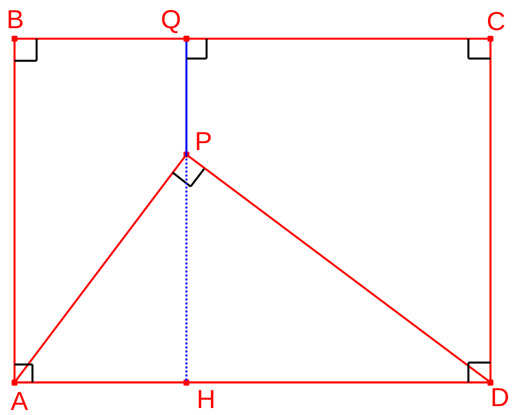
Aplicant el teorema de l'altura:

$h^2=\frac{9}{2}\cdot 8=36$.

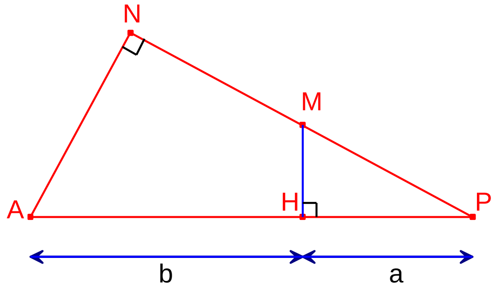
$h=6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PHD}$:

$\overline{PD}=10$.

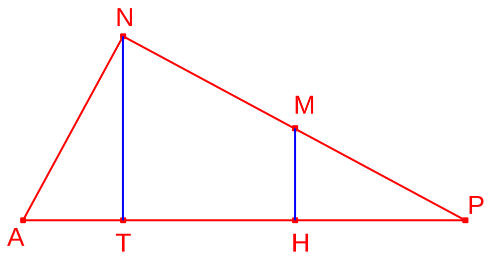


1250.- A la figura calculeu la mesura del catet $\overline{AN}$ si $\overline{MN} = \overline{MP}$.



Solució:

Siga $\overline{NT}$ l'altura del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANP}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NTP}$, $\overset{\Delta}{MHP}$.

Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{TH}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{HP}}{\overline{MP}}$. Aleshores:

$\overline{TH} = \overline{HP} = a$,

$\overline{AT} = \overline{AH} - \overline{TH} = b - a$.

Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANP}$:

$\overline{AN}^2 = \overline{AT} \cdot \overline{AP}$.

$\overline{AN}^2 = (b-a)(b+a)$.

$\overline{AN} = \sqrt{b^2 - a^2}$.