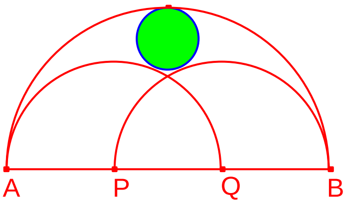
Problemes de Geometria per a l'ESO 126

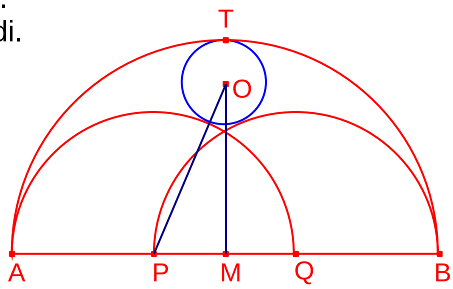
1251.- En la figura hi ha 3 semicircumferències de diàmetres $\overline{AB}, \overline{AQ}, \overline{PB}$.

Si $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$, $\overline{AB} = 30$.
Calculeu el radi la circumferència de la figura tangent als tres arcs.



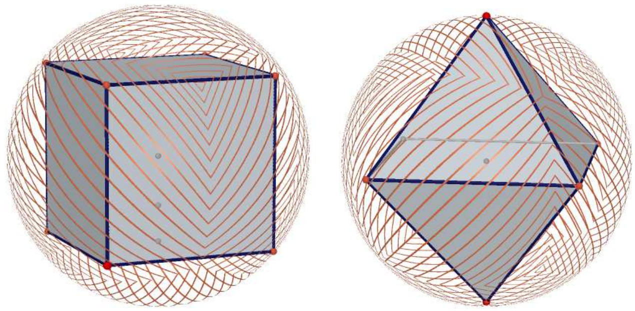
Solució:
Siga $\overline{AP} = 10$.
P i Q són els centres de les dues semicircumferències menors.
Siga O el centre de la circumferència tangent i siga r el seu radi.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
$\overline{AM} = \overline{MT} = 15$
$\overline{PM} = 5$, $\overline{OP} = 10 + r$, $\overline{OM} = 15 - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:
$(10 + r)^2 = 5^2 + (15 - r)^2$. Resolent l'equació:
$r = 3$.

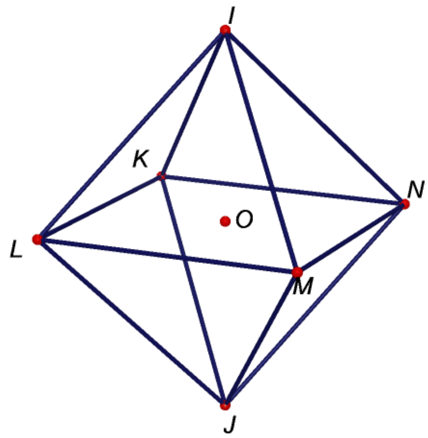


1252.- Un cub i un octaedre regular estan inscrits en una esfera de radi r.

a) Determineu la proporció entre els volums del cub i l'octaedre regular.
b) Determineu la proporció entre les superfícies del cub i l'octaedre regular.
c) Determineu la proporció entre la suma de les longituds de les arestes del cub i l'octaedre regular.



Solució:
Siga IJKLMN l'octaedre regular.
Siga $\overline{KL} = \overline{IL} = a$ aresta de l'octaedre. $\angle LIB = 90^{\circ}$.
Siga O el centre de l'esfera (centre de l'octaedre.
$\overline{OL} = \overline{OI} = r$ radi de l'esfera circumscrita a l'octaedre..
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{IOL}$: $\overline{IL} = r\sqrt{2} = a$.

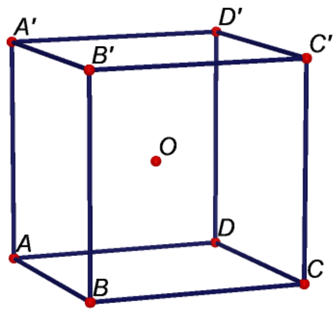


El volum de l'octaedre és: $V_8 = \frac{1}{3} S_{KLMN} \cdot \overline{IJ} = \frac{1}{3} a^2 \cdot 2r = \frac{4}{3} r^3$.

L'àrea de l'octaedre és: $S_8 = 8 \cdot S_{KLI} = 8 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 4\sqrt{3} r^2$.

La suma de les longituds de les arestes és: $P_8 = 12a = 12\sqrt{2}\, r$.

Siga ABCDA'B'C'D' el cub.
Siga $\overline{AB} = b$ aresta del cub. Siga O el centre de l'esfera (centre del cub).



$\overline{AC'} = b\sqrt{3} = 2r$. $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$.

El volum del cub és: $V_6 = b^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} r^3$.

L'àrea del cub és: $S_6 = 6 \cdot b^2 = \frac{8}{3} r^2$.

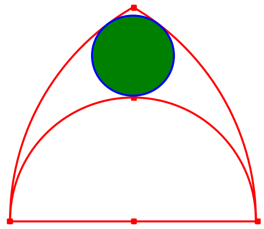
La suma de les longituds de les arestes és: $P_6 = 12b = 8\sqrt{3}\, r$.

La proporció entre els volums del cub i l'octaedre és: $\frac{V_6}{V_8} = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{9} r^3}{\frac{4}{3} r^3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

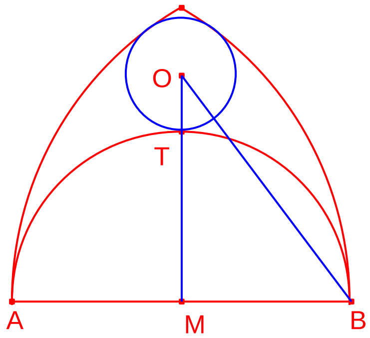
La proporció entre les àrees del cub i l'octaedre és $\frac{S_6}{S_8} = \frac{\frac{8}{3} r^2}{4\sqrt{3} r^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

La proporció entre suma de les longituds de les arestes del cub i l'octaedre és:
$\frac{P_6}{P_8} = \frac{8\sqrt{3}\, r}{12\sqrt{2} r} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

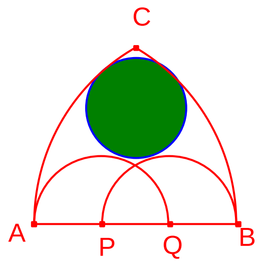
1253.- En la figura hi ha una semicircumferència de radi r i dos arcs equilàters de radi 2r.
Determineu el radi de la circumferència tangent als tres arcs.



Solució:
Siga $\overline{AB}=2r$ diàmetre de la semicircumferència.
Siga O en centre de la circumferència tangent als tres arcs.
Siga $\overline{OT}=s$ radi de la circumferència.
$\overline{MO}=r+s$, $\overline{MB}=r$, $\overline{OB}=2r-s$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$(2r-s)^2=(r+s)^2+r^2$.
Resolent l'equació:
$s=\frac{1}{3}r$.

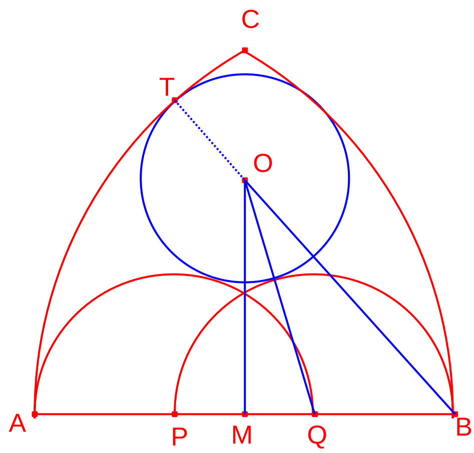


1254.- En la figura hi ha 2 semicircumferències de diàmetres $\overline{AQ},\overline{PB}$, i dos arcs equilàters.

Si $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$, $\overline{AB}=12$.

Calculeu el radi de la circumferència de la figura tangent als quatre arcs.

Solució:



Siga O el centre de la circumferència tangent als quatre arcs.

Siga $\overline{OT}=r$ radi de la circumferència.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{AM}=\overline{MB}=6$.

$\overline{AP}=\overline{PQ}=4$.

$\overline{MQ}=2$, $\overline{OQ}=4+r$, $\overline{OB}=12-r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMQ}$:

$\overline{OM}^2=(4+r)^2-2^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$\overline{OM}^2=(12-r)^2-6^2$.

Igualant les dues expressions:

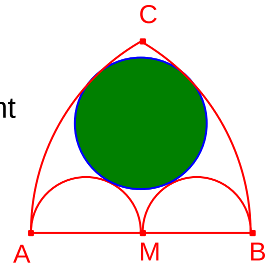
$(4+r)^2-2^2=(12-r)^2-6^2$.

Resolent l'equació:

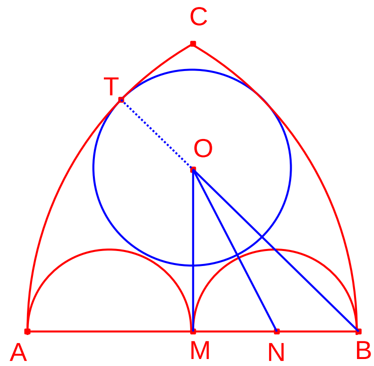
$r=3$.

1255.- En la figura hi ha 2 semicircumferències de diàmetres iguals $\overline{AM}, \overline{MB}$, i dos arcs equilàters.

Si, $\overline{AB} = 4r$, calculeu el radi de la circumferència de la figura tangent als quatre arcs.

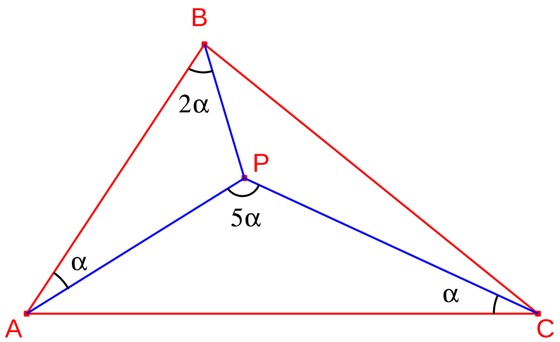


Solució:
Siga O el centre de la circumferència tangent als quatre arcs.
Siga $\overline{OT} = s$ radi de la circumferència.
Siga N el punt mig del segment $\overline{MB}$.
$\overline{MN} = r$.
$\overline{MB} = 2r$, $\overline{ON} = r + s$, $\overline{OB} = 4r - s$.

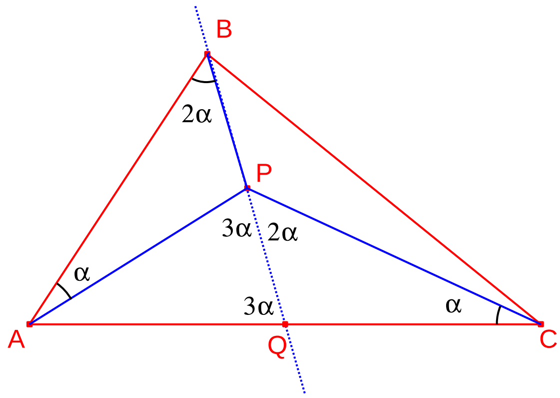


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$:
$\overline{OM}^2 = (r + s)^2 - r^2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:
$\overline{OM}^2 = (4r - s)^2 - (2r)^2$.
Igualant les dues expressions:
$(r + s)^2 - r^2 = (4r - s)^2 - (2r)^2$.
Resolent l'equació:
$s = \frac{3}{5} r$.

1256.- En la figura $\overline{AB}=\overline{PC}$, $\overline{AC}=16$.
Calculeu $\overline{AP}$.



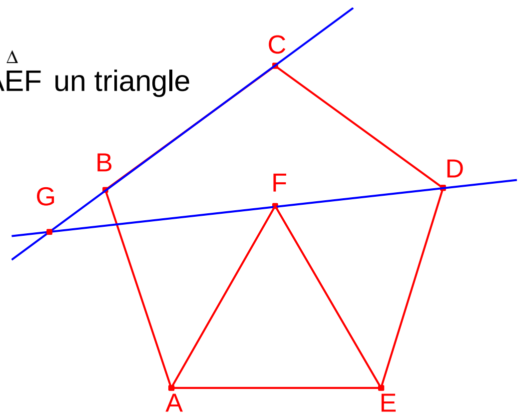
Solució:
La recta BP talla el costat $\overline{AC}$ en el punt Q.
$\angle APQ=\angle ABP+\angle BAP=3\alpha$.
Aleshores, $\angle QPC=5\alpha-\angle APQ=2\alpha$.
$\angle PQA=\angle QPC+\angle QCP=3\alpha$.



Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CPQ}$ són iguals (ALA).
Aleshores, $\overline{CQ}=\overline{AP}$.
El triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és isòsceles, aleshores:
$\overline{AQ}=\overline{AP}$.
$16=\overline{AC}=\overline{AQ}+\overline{CQ}=2\overline{AP}$.
Aleshores, $\overline{AP}=8$.

1257.- En el dibuix ABCDE és un pentàgon regular i $\overset{\Delta}{AEF}$ un triangle equilàter.

Si $\overline{GD} = 10$ calculeu la distància de D a la recta CG.



Solució:

Siga P la projecció de D sobre la recta CG.

La distància de D a la recta CG és igual a la mesura del segment $\overline{DP}$.

L'angle interior del pentàgon regular és $\angle AED = \frac{180^o(5-2)}{5} = 108^o$.

$\angle FED = \angle BAF = 108^o - 60^o = 48^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{FED}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle EFD = \angle FDE = \frac{180^o - 48^o}{2} = 66^o$.

$\angle GFA = 180^o - (60^o + 66^o) = 54^o$.

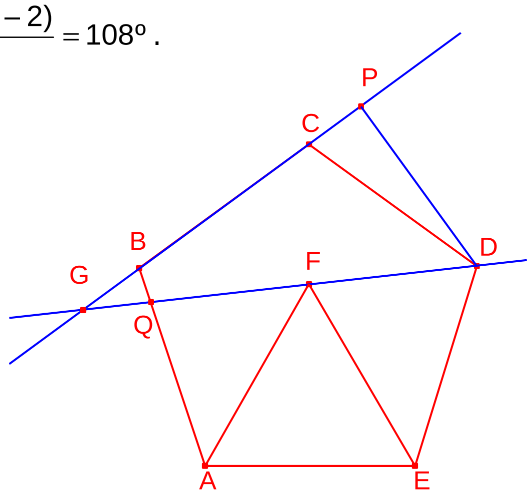
Siga Q la intersecció de la recta DF i el costat $\overline{AB}$.

$\angle FQA = 180^o - (48^o + 54^o) = 78^o$.

$\angle GQB = \angle FQA = 78^o$.

$\angle GBA = 180^o - 108^o = 72^o$.

$\angle BGQ = 180^o - (72^o + 78^o) = 30^o$.

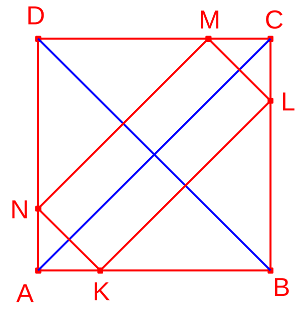


En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{GPD}$, $\angle PGD = 30^o$, aleshores:

$\overline{DP} = \frac{1}{2}\overline{GD} = \frac{1}{2}10 = 5$.

1258.- S'inscriu un rectangle en un quadrat, tal que els seus costats siguen paral·lels a les diagonals del quadrat.
Calculeu la proporció entre els perímetres del quadrat i del rectangle.

Solució:



Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
Siga KLMN el rectangle inscrit en el quadrat tal que els seus costats són paral·lels a les diagonals del quadrat.
Siga $\overline{AK} = \overline{AN} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKN}$:
$\overline{KN} = \overline{LM} = x\sqrt{2}$.
$\overline{BK} = \overline{BL} = c - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KBL}$:
$\overline{KL} = \overline{LNM} = (c - x)\sqrt{2}$.
El perímetre del quadrat ABCD és:
$P_{ABCD} = 4c$.
El perímetre del rectangle KLMN és:
$P_{KLMN} = 2\overline{KN} + 2\overline{KL} = 2x\sqrt{2} + 2(c - x)\sqrt{2} = 2c\sqrt{2}$.
La proporció entre els perímetres del quadrat i el rectagle és:
$$\frac{P_{ABCD}}{P_{KLMN}} = \frac{4c}{2c\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

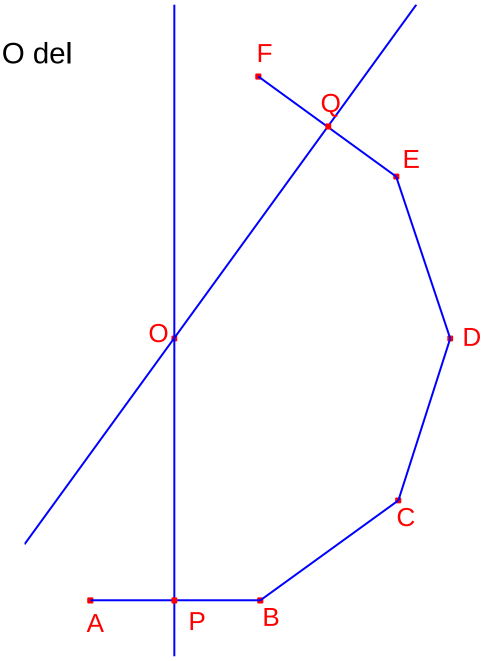
1259.- Calculeu el nombre de costats d'un polígon regular ABCDEF.... si les mediatrius dels costat $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ formen un angle de 36º.

Solució:

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga Q el punt mig del costat $\overline{EF}$.

Les mediatrius d'un polígon regular passen pel centre O del polígon regular.



Siga $\alpha = \angle AOB$ angle central del polígon regular,

Siga n el nombre de costats del polígon.

$\alpha = \frac{360º}{n}$.

$\angle POB = \angle QOE = \frac{\alpha}{2}$.

$\angle POQ = 4\alpha$.

$\angle POQ = 180º - 36º = 144º$.

Igualant les dues expressions:

$4\alpha = 144º$.

Resolent l'equació:

$\alpha = 36º$.

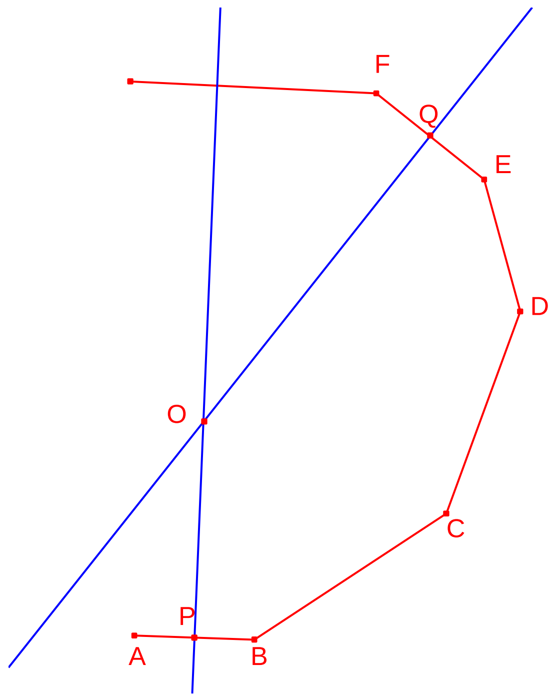
$\alpha = \frac{360º}{n} = 36º$. Resolent l'equació:

$n = 10$.

El polígon té 10 costats.

1260.- Calculeu el nombre de costats d'un polígon equiangular ABCDEF.... si les mediatrius dels costat $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ formen un angle de 36º.

Solució:
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{EF}$.
Siga O la intersecció de les mediatrius $\overline{AB}$, $\overline{EF}$.



La suma dels angles d'un polígon convex de n costats és:
$180^o(n-2)$.
L'angle interior d'un polígon equiangular és:
$\angle ABC = \dfrac{180^o(n-2)}{n}$.
Considerem l'heptàgon ABCDEFO.
La suma dels seus angles és:
$180^o(7-2) = \angle POQ + 2\cdot 90^o + 4\dfrac{180^o(n-2)}{n}$.
Resolent l'equació:
$\angle POQ = \dfrac{1440^o}{n}$.
$\angle POQ = 180^o - 36^o = 144^o$.
$\dfrac{1440^o}{n} = 144^o$
$\angle POQ = 4\alpha$.
Resolent l'equació:
$n = 10$.
El polígon té 10 costats.