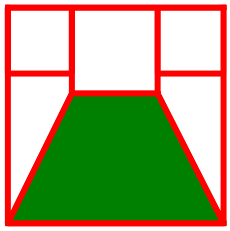
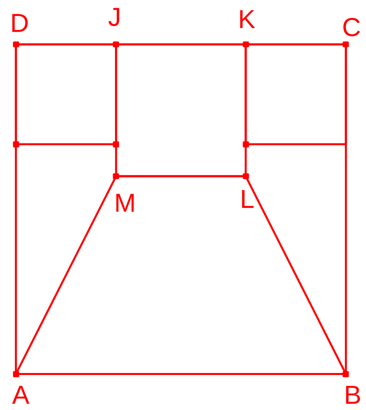
Problemes de Geometria per a l'ESO 127

1261.- En la figura un quadrat gran conté tres quadrats menuts d'àrees $9cm^2$, $9cm^2$, $16cm^2$.
Calculeu, en cm^2 l'àrea de la regió ombrejada.
Concurso primavera 2013. 2ª fase. nivell2, problema 17

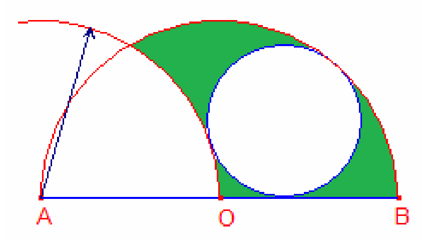


Solució:
Siga ABCD el quadrat gran.
Els costats dels dos quadrats menuts mesuren:
$\overline{DJ} = \overline{CK} = \sqrt{9} = 3$.
El costat del quadrat mitjà JKLM és:
$\overline{JK} = \overline{KL} = \sqrt{16} = 4$.
El costat del quadrat ABCD és:
$\overline{CD} = \overline{BC} = 3 + 4 + 3 = 10$.
L'àrea del trapezi BCKL és:
$S_{BCKL} = \frac{\overline{BC} + \overline{KL}}{2}\overline{CK} = \frac{10+4}{2}3 = 21$.

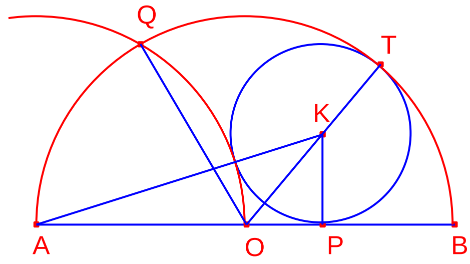


L'àrea de la zona ombrejada ABLM és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees del quadrat JKLM i dos trapezis rectangles BCKL, ADJM:
$S_{ABLM} = 10^2 - \left(4^2 - 2\cdot 21\right) = 42cm^2$.

1262.- Determineu l'àrea ombrejada si
$\overline{OA}=\overline{OB}=r$ ($\overline{AB}$ diàmetre).



Solució:
Siga K el centre de la circumferència tangents i $\overline{KT}=\overline{KP}=s$ el seu radi.
Siga Q la intersecció dels dos arcs.



$\overset{\Delta}{AOQ}$ és un triangle equilàter.
$\angle QOB=120^{o}$.
$\overline{OK}=r-s$, $\overline{AK}=r+s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPK}$:
$\overline{OT}=\sqrt{(r-s)^2-s^2}=\sqrt{r^2-2rs}$.

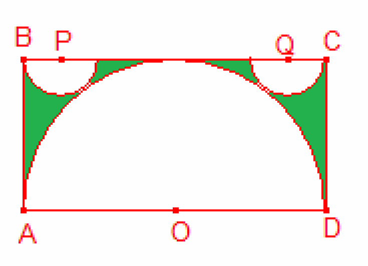
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APK}$:
$(r+s)^2=s^2+\left(r+\overline{OT}\right)^2$.
$(r+s)^2=s^2+\left(r+\sqrt{r^2-2rs}\right)^2$. Simplificant:
$4s-r=2\sqrt{r^2-2rs}$. Elevant al quadrat:
$16s^2=3r^2$.
$s=\frac{\sqrt{3}}{4}r$.

L'àrea ombrejada és igual a la tercera part d'un cercle de radi r menys l'àrea d'un cercle de radi s, menys l'àrea d'un segment circular de radi r i 60º:

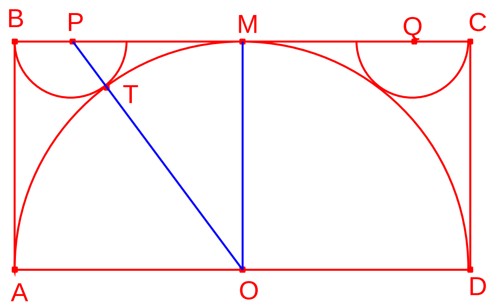
$$S=\frac{1}{3}\pi r^2-\left(\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\right)^2+\frac{1}{6}\pi r^2-\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)=\left(-\frac{\pi}{48}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2.$$

1263.- En la figura P, Q, i O són centres de les semicircumferències.

Si el rectangle ABCD té perímetre 24, determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OM}=r$.

$\overline{AB}=r$, $\overline{AD}=2r$.

El perímetre del rectangle ABCD és 24, aleshores:

$6r=24$. Resolent l'equació:

$r=4$.

Aleshores, $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=8$.

Siga $\overline{PB}=\overline{QC}=s$ radi de les semicircumferències menudes.

$\overline{OP}=4+s$, $\overline{OM}=4$, $\overline{PM}=4-s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$(4+s)^2=4^2+(4-s)^2$. Resolent l'equació:

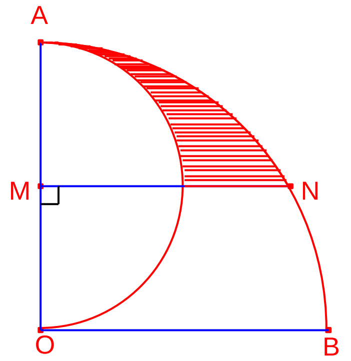
$s=1$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys l'àrea d'un semicercle de radi 4 i un cercle de radi 1:

$$S=8\cdot 4-\left(\frac{1}{2}\pi 4^2+\pi 1^2\right)=32-9\pi.$$

1264.- En la figura hi ha dibuixat un quadrant de circumferència i una semicircumferència.

Si $\overline{AM} = \overline{MO} = r$ calculeu l'àrea de la regió ratllada.



Solució:

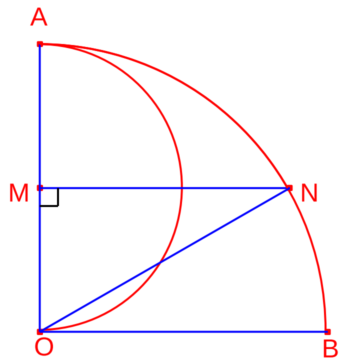
Botem que $\overline{ON} = \overline{OB} = 2r$.

Per tant en el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$, $\angle MON = 60^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$:

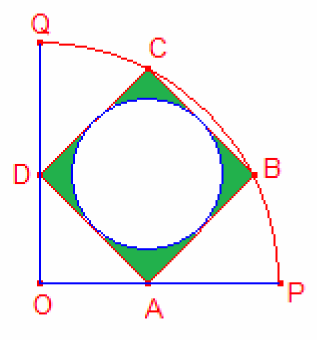
$\overline{MN} = r\sqrt{3}$

L'àrea ratllada és igual a l'àrea d'un sector circular de radi 2r i 60º, menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$, menys l'àrea d'un quadrant de radi r.



$$S = \frac{1}{6}\pi(2r)^2 - \left(\frac{1}{2}r \cdot r\sqrt{3} + \frac{1}{4}\pi r^2\right) = \left(\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2.$$

1265.- En la figura en un quadrant de circumferència hi ha inscrit el quadrat ABCD.



En el quadrat ABCD hi ha inscrita una circumferència.
Si $\overline{OP} = r$ calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

Solució:
Siga $\overline{AD} = c$ costat del quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAD}$:

$$\overline{OA} = \overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{AC} = \overline{OD} = c\sqrt{2}$.
$\overline{OC} = \overline{OP} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$:

$r^2 = \left(c\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2$.. Resolent l'equació:

$$c = \frac{\sqrt{10}}{5}r.$$

El radi de la circumferència inscrita al quadrat és:

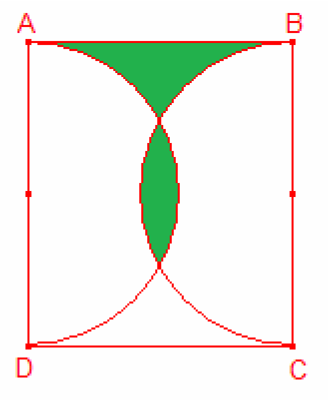
$$s = \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{10}}{10}r.$$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea del cercle de radi s:

$$S = c^2 - \pi s^2 = \frac{2}{5}r^2 - \pi\frac{1}{10}r^2 = \left(\frac{2}{5} - \frac{\pi}{10}\right)r^2.$$

1266.- Siga el rectangle ABCD, tal que $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ són diàmetres de dos semicircumferències.

Si $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$, $\overline{AD} = 8$ calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Siga O el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siguen P i Q els punts intersecció de les dues circumferències.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$ (centre del rectangle ABCD).

$\overline{OP} = 4$, $\overline{OM} = 2\sqrt{3}$.

Aleshores, en el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$, $\angle POM = 30^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$\overline{PM} = 2$.

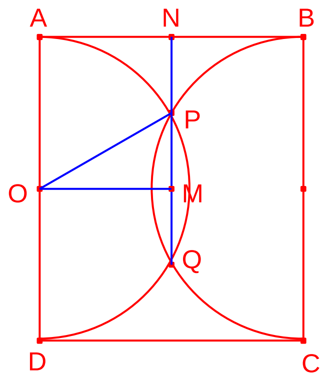
Aleshores, $\angle AOP = \angle OOQ = 60^o$.

Els segments circulars $\overset{\frown}{AP}$, $\overset{\frown}{PQ}$ són iguals.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABP}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.

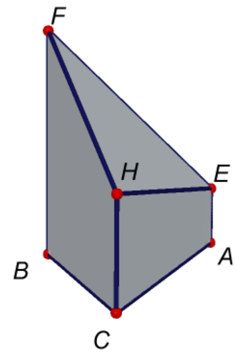
$$\overline{NP} = \frac{1}{2}\overline{AD} - \overline{PM} = 2.$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és:

$$S = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{NP} = \frac{1}{2}4\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}.$$

1267.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=10$.

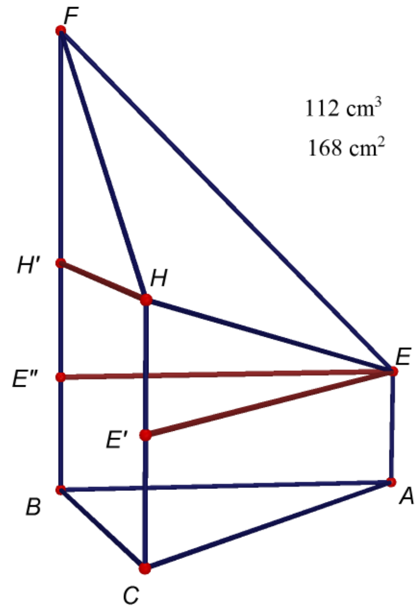


Perpendicularment al plànol que determina el triangle s'aixequen $\overline{AE}=2$, $\overline{BF}=8$, $\overline{CH}=4$. Determineu l'àrea i el volum del sòlid ABCEFH.

Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle en B ja que $10^2=6^2+8^2$.
El sòlid és un prisma triangular recte truncat.
El volum és:

$$V_{ABCEFH}=S_{ABC}\frac{\overline{AE}+\overline{BF}+\overline{CH}}{3}=\frac{1}{2}(6\cdot 8)\cdot\frac{2+8+4}{3}=112.$$



Siga E' la projecció de E sobre l'aresta $\overline{CH}$.
$\overline{E'H}=2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EE'H}$:
$\overline{EH}=2\sqrt{26}$.

Siga E" la projecció de E sobre l'aresta $\overline{BF}$.
$\overline{E''F}=6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EE''F}$:
$\overline{EF}=6\sqrt{2}$.

Siga H' la projecció de H sobre l'aresta $\overline{BF}$.
$\overline{H'F}=4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HH'F}$:
$\overline{FH}=4\sqrt{5}$.

Siga $\alpha=\angle EFH$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EFH}$:

$$\left(2\sqrt{26}\right)^2=\left(4\sqrt{5}\right)^2+\left(6\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 4\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{2}\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}.\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFH}$ és:

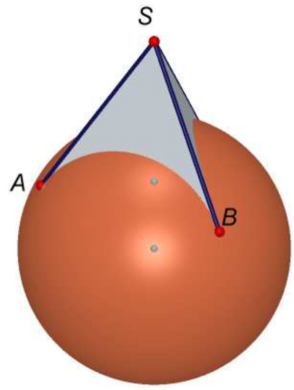
$$S_{EFH}=\frac{1}{2}\overline{EF}\cdot\overline{FH}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}6\sqrt{2}4\sqrt{5}\frac{3}{\sqrt{10}}=36.$$

L'àrea del sòlid ABCEFH és:

$$S_{ABCEFH}=S_{ABC}+S_{BCHF}+S_{CAEH}+S_{BAEF}+S_{EFH}.$$

$$S_{ABCEFH}=\frac{1}{2}(6\cdot 8)+\frac{8+4}{2}8+\frac{2+4}{2}10+\frac{8+2}{2}6+36=168.$$

1268.- Calculeu el volum de l'esfera tangent a les arestes $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}$ del tetraedre regular SABC en els vèrtexs A, B, C respectivament, essent l'àrea del tetraedre $3\sqrt{3}\ u^2$.



Solució:

Siga $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedre.

La superfície del tetraedre és:

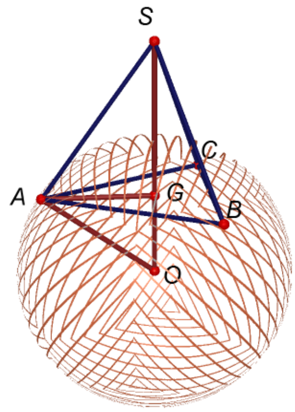
$4\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\sqrt{3}$. Resolent l'equació:

$a = \sqrt{3}$.

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = 1$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$:

$\overline{GS} = \sqrt{2}$.

Siga O el centre de l'esfera.

O pertany a la recta perpendicular a la base $\overset{\Delta}{ABC}$ que passa pel baricentre.

Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ radi de l'esfera.

Per ser l'esfera tangent a l'aresta $\overline{SA}$ en el vèrtex A, $\overline{OA}$ és perpendicular a $\overline{SA}$.

Siga $\overline{OG} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAS}$:

$\left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = \left(\sqrt{2} + x\right)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OGA}$:

$r^2 = 1^2 + x^2$.

Considerem el sistema $\begin{cases} \left(\sqrt{3}\right)^2 + r^2 = \left(\sqrt{2} + x\right)^2 \\ r^2 + 1^2 + x^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

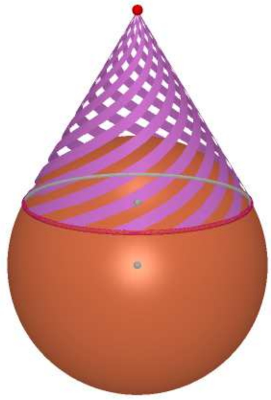
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ r = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}.$$

El volum de l'esfera és:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \pi\sqrt{6}\ u^3.$$

1269.- Una esfera és tangent a la base d'un con equilàter de radi r (el diàmetre de la base és igual a la generatriu).

Determineu el volum del la part del con que està fora de l'esfera.



Solució:

Siga $\overline{AB} = 2r$ diàmetre del con.

$\overline{SA} = \overline{SB} = 2r$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$ centre de la base del con.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$\angle ASM = 30^{o}$.

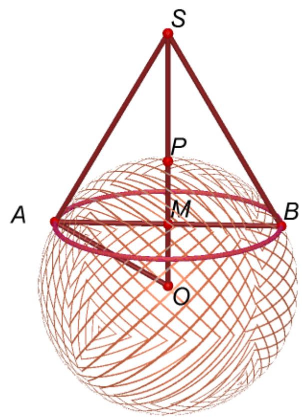
$\overline{MS} = r\sqrt{3}$.

Siga O el centre de l'esfera tangent a la generatriu en el punt A.

Siga $\overline{OA} = R$ el radi.

Siga $\overline{OM} = x$.

$\angle MAO = 30^{o}$.



$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}r \\ R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r \end{cases} .$$

El segment $\overline{OS}$ talla l'esfera en el punt P.

El volum del la part del con que està fora de l'esfera és igual al volum del con menys el volum del casquet esfèric de radi R i altura $h = \overline{MP}$.

$$h = \overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{3}r .$$

El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi r^{2} \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^{3} .$$

El volum del casquet és:

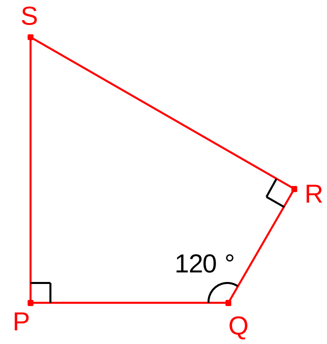
$$V_{casquet} = \pi h^{2}\left(R - \frac{h}{3}\right) = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{9}r\right) = \frac{\pi 5\sqrt{3}}{27}r^{3} .$$

El volum del la part del con que està fora de l'esfera és:

$$V = V_{con} - V_{casquet} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^{3} - \frac{\pi 5\sqrt{3}}{27}r^{3} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}r^{3} .$$

1270.- En la figura $\overline{PQ} = 12\sqrt{3}$, $\overline{QR} = 8\sqrt{3}$.

Calculeu $\overline{PS} + \overline{RS}$.



Solució:

Tracem la perpendicular al costat $\overline{PQ}$ que passa per Q que talla el costat $\overline{SR}$ en T.

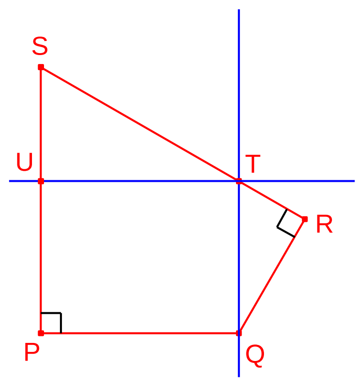
$\angle TQR = 30^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QRT}$:

$\overline{RT} = 8$, $\overline{QT} = 16$.

$\angle PSR = 60^{\circ}$.

Tracem la perpendicular al segment $\overline{QT}$ que passa per T que talla el costat $\overline{PS}$ en U.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SUT}$:

$\overline{SU} = 12$, $\overline{ST} = 24$.

$\overline{PS} + \overline{SR} = \overline{SU} + \overline{QT} + RT + \overline{ST} = 12 + 16 + 8 + 24 = 60$.