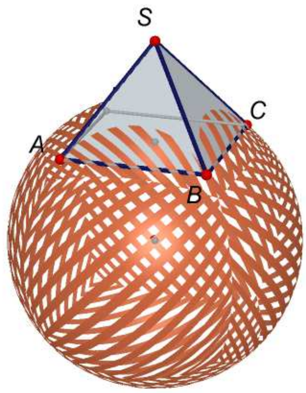
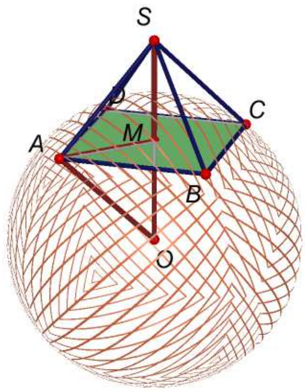
Problemes de Geometria per a l'ESO 128

1271.- Siga la piràmide regular ABCDS de base el quadrat ABCD que té totes les arestes iguals a $\overline{AB} = a$.
Calculeu la superfície de l'esfera tangent a les arestes $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$ els vèrtexs A, B, C, D respectivament.



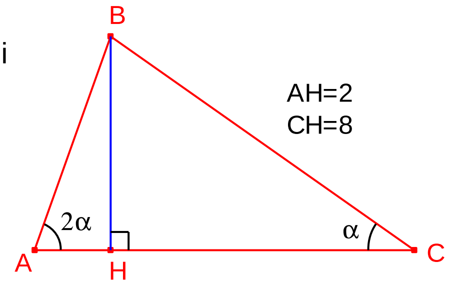
Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.
Aplicant el teorema invers de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ASC}$:
$\angle ASC = 90º$.
Siga M el centre del quadrat ABCD
$\angle SAM = 45º$.
Siga O el centre de l'esfera.
O pertany a la recta perpendicular a la base ABCD que passa pel centre M.
Per ser l'esfera tangent a l'aresta $\overline{SA}$ en el vèrtex A, $\overline{OA}$ és perpendicular a $\overline{SA}$.
$\angle SAO = 90º$.
Aleshores, $\angle MA == 901 - \angle SAM = 45º$.
El triangle $\overset{\Delta}{AMO}$ és rectangle i isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{OA} = a$ radi de l'esfera.
La superfície de l'esfera és:
$S_{esfera} = 4\pi a^2$.



1272.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ del dibuix $A = 2C$, $\overline{BH}$ és altura i $\overline{AH} = 2$, $\overline{CH} = 8$.

Calculeu la mesura de $\overline{AB}$.



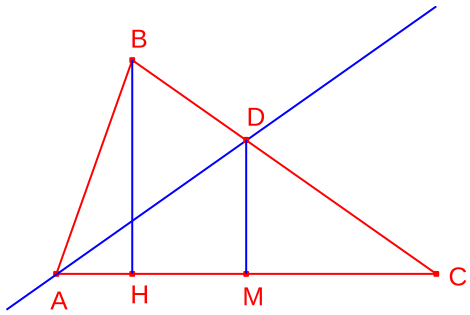
Solució 1:

Siga $\overline{AD}$ bisectriu de l'angle A.

El triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$.

$\overline{HM} = 3$, $\overline{CM} = 5$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BHC}$, $\overset{\Delta}{DMC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BD}}{3} = \frac{\overline{CD}}{5}$. Siga $\overline{BD} = 3x$, $\overline{CD} = 5x$.

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. $\frac{3x}{\overline{AB}} = \frac{5x}{10}$. Resolent l'equació:

$\overline{AB} = 6$.

Solució 2:

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHB}$, $\overset{\Delta}{CHB}$:

$\overline{BH} = 2\text{tg}2\alpha = 8\text{tg}\alpha$.

$2\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} = 8\text{tg}\alpha$. Simplificant:

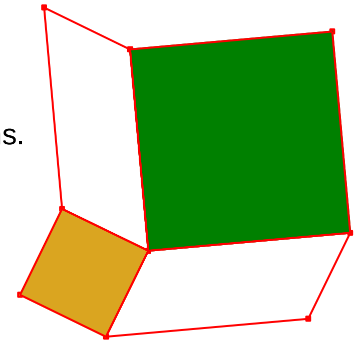
$\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{2}$. $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{BH} = 8\text{tg}\alpha = 4\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHB}$:

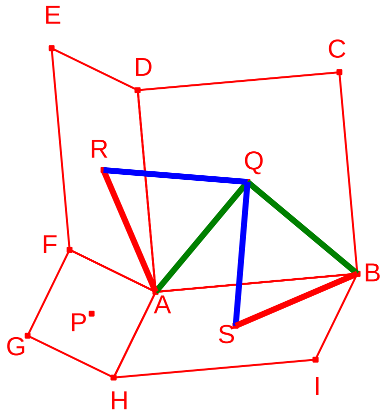
$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 6$.

1273.- Dos quadrats i dos paral·lelograms s'uneixen com mostra la figura.
La distància entre el centres dels quadrats és 2cm.
Determineu la distància entre els centres dels paral·lelograms.



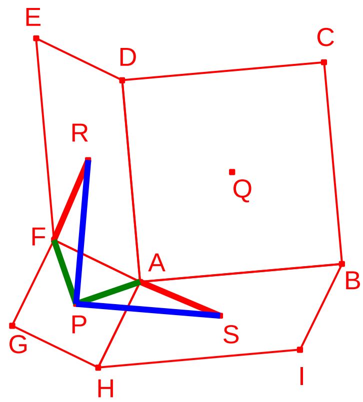
Solució:

Siguen els quadrats ABCD, AFGH de centres Q, P, respectivament tal que $\overline{PQ}=2$.
Siguen el paral·lelograms ADEF, AHIB de centres R, S, respectivament.
Notem que $\angle FAD+\angle HAB=180^o$, aleshores els dos paral·lelograms són iguals.
Siga $\alpha=\angle RAD=\angle ABS$.
$\angle RAQ=\angle QBS$.
$\overline{BQ}=\overline{AQ}$, $\overline{BS}=\overline{AR}$.



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{SBQ}$, $\overset{\Delta}{RAQ}$ són iguals (LAL).
Aleshores, $\overline{RQ}=\overline{QS}$.
Un gir de 90º de centre Q transforma A en B.
Aleshores, transforma R en S, per tant, $\overline{RQ}, \overline{QS}$ són perpendiculars.

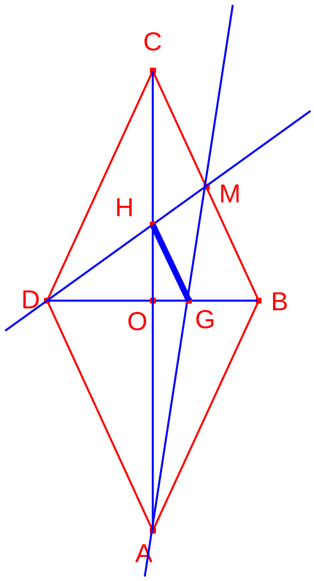
Anàlogament els triangles $\overset{\Delta}{RFP}$, $\overset{\Delta}{SAP}$ són iguals, aleshores, $\overline{RQ}=\overline{QS}$ i perpendiculars.



Els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{RQS}$, $\overset{\Delta}{RPS}$ són iguals.
Per tant, PSQR és un quadrat.
Aleshores, $\overline{RS}=\overline{PQ}=2$ i són perpendiculars.

1274.- En un rombe ABCD de costat 12 s'agafa M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

La recta AM talla $\overline{BD}$ en el punt G.
La recta DM talla $\overline{AC}$ en el punt H.
Calculeu la mesura del segment $\overline{GH}$.



Solució:
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars.

$\overline{AM}$ i $\overline{BO}$ són mitjanes del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aleshores, G és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aplicant la propietat del baricentre:

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{BG}} = \frac{1}{2}.$$

Anàlogament, H és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.
Aplicant la propietat del baricentre:

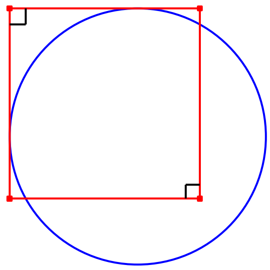
$$\frac{\overline{OH}}{\overline{CH}} = \frac{1}{2}.$$

En els triangles $\overset{\Delta}{OGH}$ $\overset{\Delta}{OBC}$: $\frac{\overline{OG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{CH}} = \frac{1}{2}$. Aleshores són proporcionals i de raó 1:3.

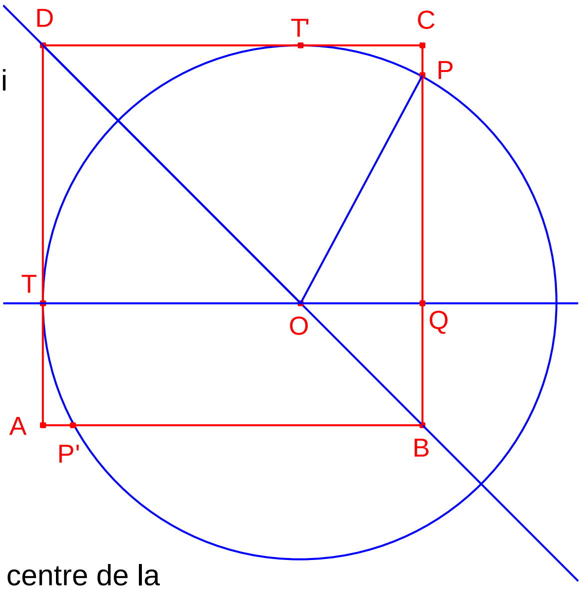
Aleshores $\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 4$.

1275.- Una circumferència és tangent a dos costats adjacents d'un quadrat i divideix cadascun dels altres costats en dos segments de longitud 2 i 23.

Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:



Siga el quadrat ABCD.

Siguen T, T' els punts de tangència de la circumferència i els costats $\overline{AD}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Siguen P, P' el punt on la circumferència talla els costats $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, respectivament.

$\overline{CP} = \overline{AP'} = 2$, $\overline{BP} = 23$.

$\overline{AB} = 25$.

El punt O pertany a la diagonal del quadrat ja que la mediatriu de $\overline{PP'}$ (diagonal del quadrat) passa pel centre de la circumferència.

Siga O el centre de la circumferència.

Siga $\overline{OP} = r$ radi de la circumferència.

La recta perpendicular a $\overline{AD}$ que passa per T, passa pel centre de la circumferència, per ser T punt de tangència.

La recta TO talla el costat $\overline{BC}$ en el punt Q.

$\overline{OQ} = 25 - r$, $\overline{PQ} = r - 2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$r^2 = (25 - r)^2 + (r - 2)^2$.

Resolent l'equació:

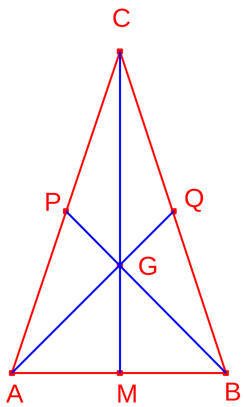
$r = 17$.

1276.- La base d'un triangle isòsceles és $2\sqrt{2}$.

Si les mitjanes traçades sobre els costats iguals són perpendiculars, calculeu l'àrea del triangle.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$.
Siguen P i Q els punts migs dels costats iguals.
Per hipòtesi $\overline{AQ}, \overline{BP}$ són perpendiculars.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
$\overline{MB} = \sqrt{2}$.

Siga G el baricentre. El triangle $\overset{\Delta}{AGB}$ és rectangle i isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AG} = \overline{BG} = 2$.
Aplicant la propietat del baricentre:
$$\overline{GQ} = \frac{1}{2}\overline{AG} = 1.$$

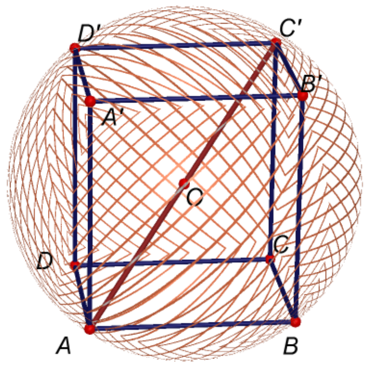
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BGQ}$:
$\overline{BQ} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
$\overline{BC} = 2\overline{BQ} = 2\sqrt{5}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$:
$$\overline{CM} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CM} = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6.$$

1277.- Determineu l'àrea i el volum de l'esfera circumscrita a un ortoedre de dimensions $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$.

Solució:
El centre de l'esfera és el punt mig de la diagonal de l'ortoedre i el radi mitja diagonal.
Siga ABCDA'B'CD' l'ortoedre.
La diagonal de l'ortoedre mesura:



$$\overline{AC'} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 3 .$$

El radi de lesfera circumscrita a l'ortoedre és:

$$r = \frac{1}{2}\overline{AC'} = \frac{3}{2} .$$

La superfície de l'esfera és:

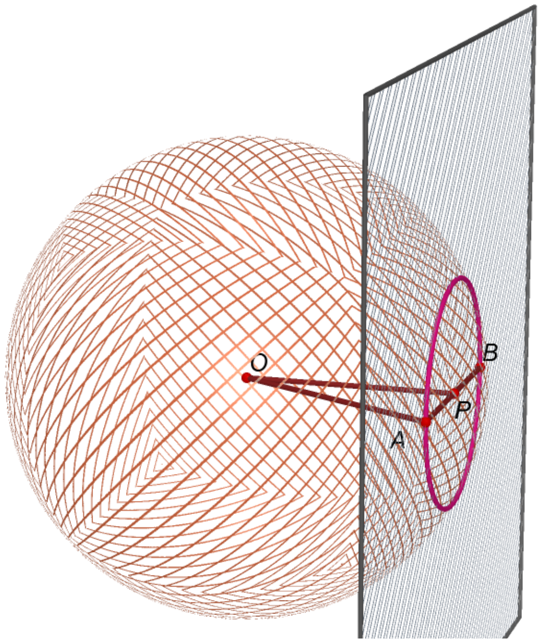
$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi .$$

El volum de l'esfera és:

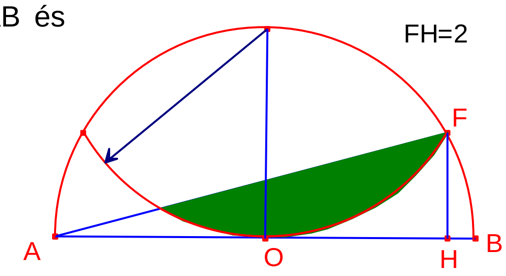
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi .$$

1278.- A quina distància del centre d'una esfera de 17cm de radi ha de passar un plànol secant a fi que la intersecció siga una circumferència de radi 8cm.

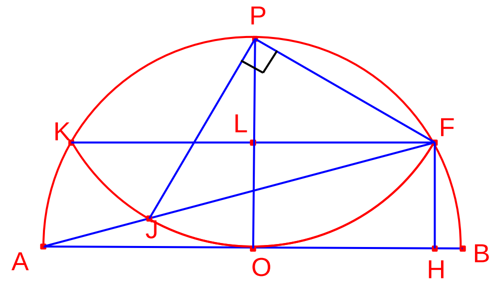
Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
El plànol secant determina una circumferència de centre P i diàmetre $\overline{AB} = 2 \cdot 8 = 16$.
La recta OP és perpendicular al plànol secant.
Per tant, la recta OP és perpendicular al diàmetre $\overline{AB}$.
La distància del centre al plànol és $\overline{OP}$.
$\overline{OA} = 17$ radi de l'esfera.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPA}$:
$\overline{OP} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.



1279.- Determineu l'àrea de la regió ombrejada si $\overline{AB}$ és diàmetre, $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{FH}=2$.
O punt de tangència de l'arc.

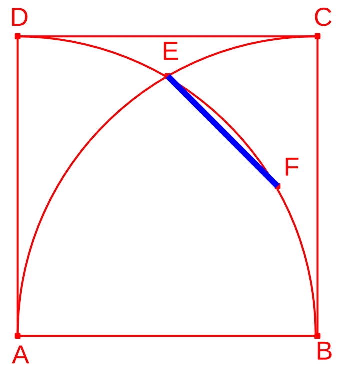


Solució:
La mediatriu del segment $\overline{AB}$ talla larc en el punt P, centre de l'altre arc,
Siga $\overline{OA}=\overline{OP}=r$ radi dels dos arcs.
Siga K intersecció dels dos arcs.
$\overline{KF}$ és paral·lela a $\overline{AB}$.



El triangle $\overset{\Delta}{OFP}$ és equilàter, aleshores,
$\angle POF=\angle OPF=60^{o}$.
$\angle KPF=2\angle OPF=120^{o}$
$\angle FOB=90^{o}-60^{o}=30^{o}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHF}$:
$r=\overline{OF}=2\cdot\overline{FH}=4$.
$\angle FAB=\frac{1}{2}\angle FOB=15^{o}$ (angle inscrit).
$\angle KFA=\angle FAB=15^{o}$. (angles entre paral·leles).
$\angle KPJ=2\angle KFJ=30^{o}$ (angle central i inscrit que abracen el mateix arc).
$\angle JPF=\angle KPF-\ell KPJ=90^{o}$.
La zona ombrejada és un segment de circumferència de radi $r=4$ de 90º:
$$S=\frac{1}{4}\pi\cdot 4^{2}-\frac{1}{2}4^{2}=4\pi-8.$$

1280.- En la figura ABCD és un quadrat de costat c.



F és el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{BE}$.
Determineu la distància de E a F.

Solució 1:

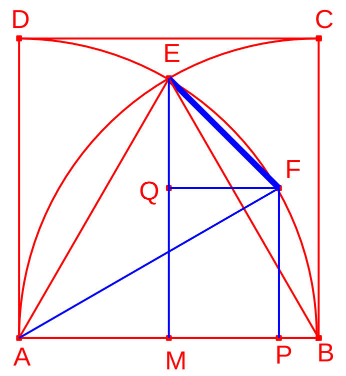
El triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és equilàter.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\angle FAB = \frac{1}{2}\angle EAB = 30^o.$$



Siga P la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció de F sobre el segment $\overline{EM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APF}$:

$$\overline{FP} = \frac{1}{2}c, \ \overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{QF} = \overline{AP} - \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c, \ \overline{EQ} = \overline{ME} - \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{EQF}$:

$$\overline{EF} = \overline{QF}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c.$$

Solució 2:

El triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és equilàter.

$$\angle FAB = \frac{1}{2}\angle EAB = 30^o.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{AEF}$:

$$\overline{EF}^2 = c^2 + c^2 - 2c^2\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{EF} = c\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c.$$