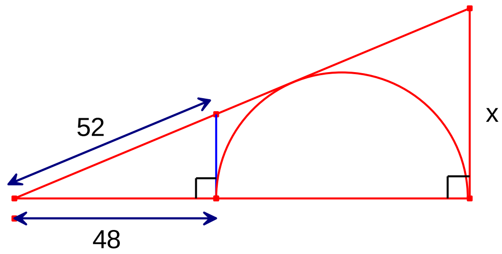
Problemes de Geometria per a l'ESO 129

1281.- En la figura determineu x.



Solució:

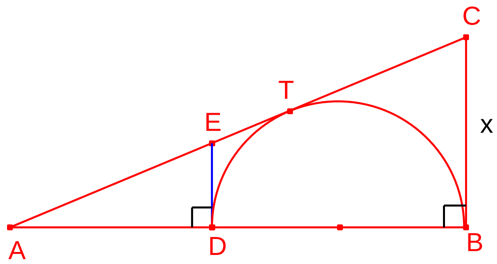
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BC} = x$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overline{AD} = 48$, $\overline{AE} = 52$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{DE} = 20$.

Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i la hipotenusa $\overline{AC}$.



$\overline{ET} = \overline{DE} = 20$, $\overline{CT} = \overline{BC} = x$.

$\overline{AC} = 52 + 20 + x = 72 + x$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{72+x} = \frac{20}{52}$. Resolent l'equació:

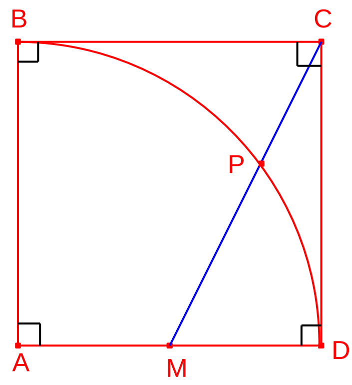
$x = 45$.

1282.- En el dibuix ABCD és un quadrat de costat $\overline{AB}=8$.

M és el punt del costat $\overline{AD}$.

El segment $\overline{CM}$ talla el quadrat de centre A en el punt P.

Calculeu la mesura del segment $\overline{PM}$.



Solució:

La recta CM talla la recta AB en el punt E que pertany a la circumferència de centre A que passa per D.

Siga $\overline{PM}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MDC}$:

$\overline{CM}=4\sqrt{5}$.

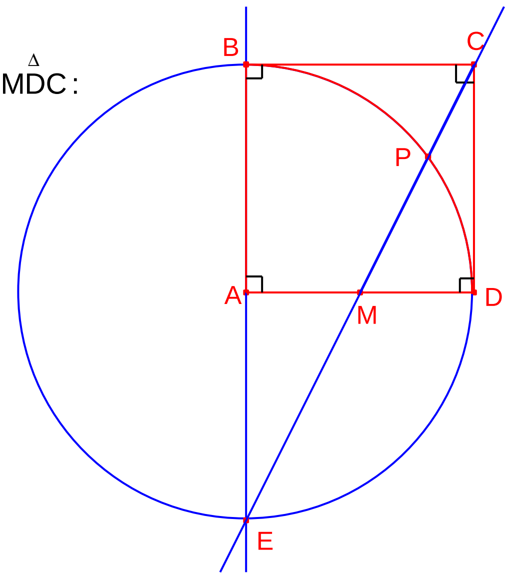
Aplicant la potència del punt C respecte de la circumferència de centre A que passa per D:

$\overline{CP}\cdot\overline{CE}=\overline{CD}^2$.

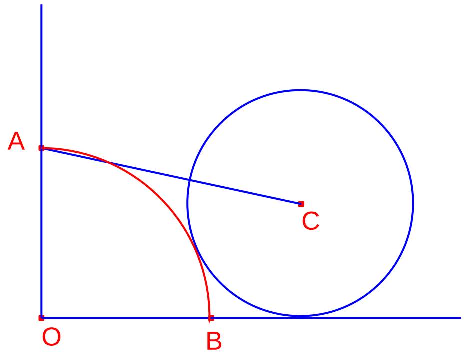
$\overline{CP}=4\sqrt{5}-x$, $\overline{CE}=2\overline{CM}=8\sqrt{5}$.

$\left(4\sqrt{5}-x\right)8\sqrt{5}=8^2$. Resolent l'equació:

$\overline{PM}=x=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.



1283.- En el dibuix $\overline{AC} = 7$ i el radi de la circumferència de centre



C és 3.

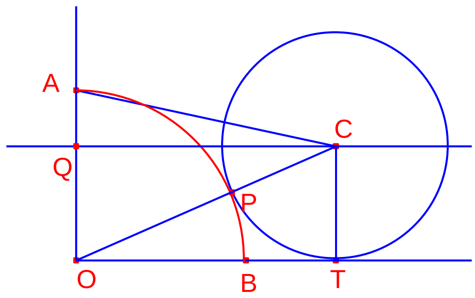
Calculeu el radi del quadrat de centre O que passa per A. i B.

Solució:

Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre C i la recta OB.

Siga P el punt de tangència de la circumferència de centre C i el quadrant.

Siga Q la projecció de C sobre la recta OA.



Siga $\overline{OA} = r$ el radi del quadrat.

$\overline{CT} = \overline{CP} = \overline{OQ} = 3$.

$\overline{OC} = r + 3$, $\overline{AQ} = r - 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQC}$:

$\overline{CQ}^2 = 7^2 - (r-3)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQC}$:

$\overline{CQ}^2 = (r+3)^2 - 3^2$.

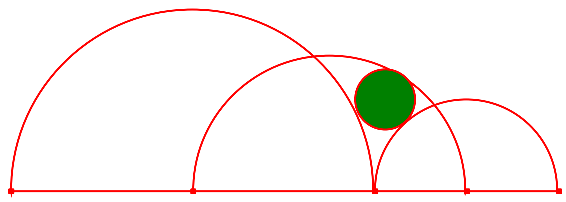
Igualant les dues expressions:

$7^2 - (r-3)^2 = (r+3)^2 - 3^2$. Resolent l'equació:

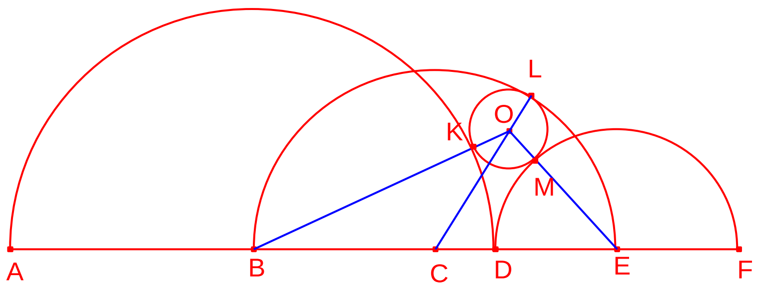
$r = 2\sqrt{5}$.

1284.- En el dibuix hi ha 3 semicircumferències.

La gran té radi 4 i la menor radi 2.
Determineu el radi de la circumferència tangent als tres arcs.



Solució 1:



La semicircumferència gran de centre B i diàmetre $\overline{AC}=8$.
La semicircumferència menuda té centre E i diàmetre $\overline{DE}$.
El diàmetre de la semicircumferència mitjana és:
$\overline{BE}=6$.
Siga O el centre de la circumferència tangent.
Siga $\overline{OK}=\overline{OL}=\overline{OM}=r$ radi de la circumferència tangent.
$\overline{OB}=4+r$, $\overline{OC}=3-r$, $\overline{OE}=2+r$.
Siga $\alpha=\angle OCE$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OCE}$:

$$\cos\alpha=\frac{(2+r)^2-(3-r)^2-3^2}{-6(3-r)}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCO}$:

$$\cos(180º-\alpha)=\frac{(4+r)^2-(3-r)^2-3^2}{-6(3-r)}.$$

Igualant les expressions:

$$\frac{(2+r)^2-(3-r)^2-3^2}{-6(3-r)}=-\frac{(4+r)^2-(3-r)^2-3^2}{-6(3-r)}.$$ Resolent l'equació:

$$r=\frac{2}{3}.$$

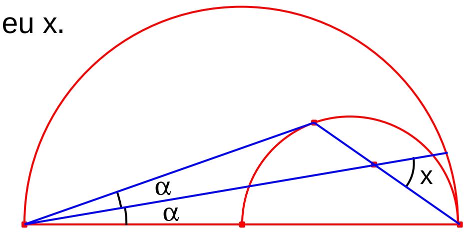
Solució 2:

$\overline{OC}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{BEO}$, aleshores: $\overline{OC}^2=\frac{1}{4}\left(2\overline{OB}^2+2\overline{OE}^2-\overline{BE}^2\right)$.

$$(3-r)^2=\frac{1}{4}\left(2(4+r)^2+2(2+r)^2+6^2\right).$$ Resolent l'equació:

$$r=\frac{2}{3}.$$

1285.- En la figura determineu x.



Solució:

Siga $\overline{AC}$ diàmetre de la semicircumferència gran.

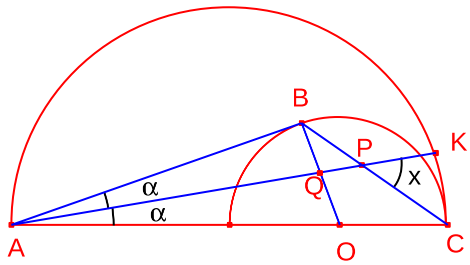
Siga O centre de la semicircumferència menuda.

Siga $\overline{OC} = \overline{OB}$ radi de la semicircumferència menuda.

Siga la bisectriu AK de l'angle $\angle BOC$.

Siga P la intersecció de $\overline{AK}$ i $\overline{BC}$.

Siga Q la intersecció de $\overline{AK}$ i $\overline{OB}$.



$\angle x = \angle KPC = \angle APB$.

$\angle ABO = 90^{o}$.

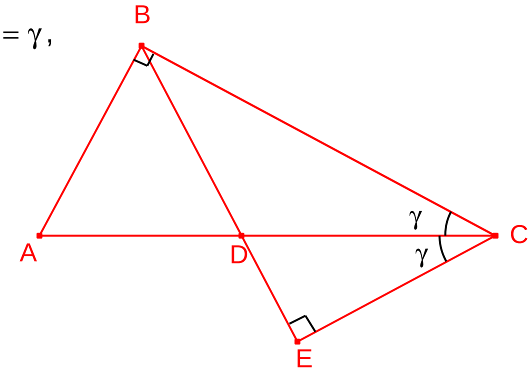
$\angle BQP = 90^{o} + \alpha$.

$\angle BOC = 90^{o} + 2\alpha$.

$\angle QBP = \frac{1}{2}\angle BOC = 45^{o} - \alpha$.

$x = \angle QPB = 180^{o} - (\angle QBP + BQP) = 180^{o} - (45^{o} - \alpha + 90^{o} + \alpha) = 45^{o}$.

1286.- En la figura $\overline{AD}=8$, $\overline{CD}=10$, $\angle ACB=\angle ACE=\gamma$, $\angle ABC=\angle BEC=90^{o}$.



Calculeu la mesura del segment $\overline{BD}$.

Solució:

$\angle EBC=90^{o}-2\alpha$.

$\angle BDA=\angle DGC+ACB=90^{o}-2\gamma+\gamma=90^{o}-\gamma$.

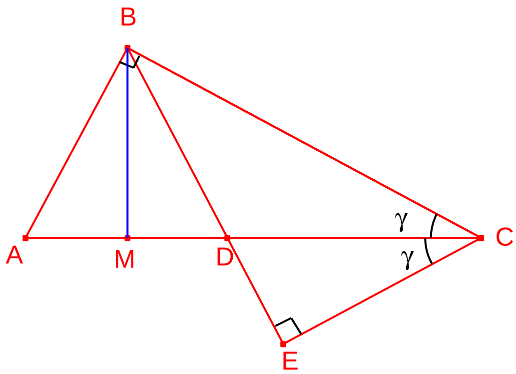
$\angle BAC=90^{o}-\gamma$.

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles, $\overline{AB}=\overline{BD}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AD}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DMB}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants:

Aplicant el teorema de Tales:



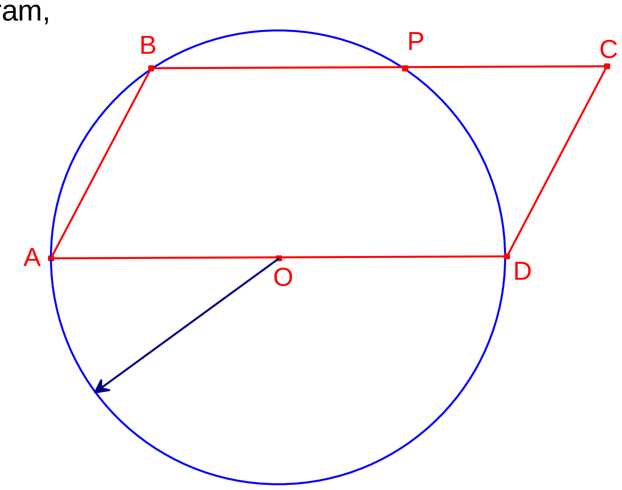
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{MD}}{\overline{BD}}$.

$\dfrac{\overline{BD}}{18}=\dfrac{4}{\overline{BD}}$. Resolent l'equació:

$\overline{BD}=6\sqrt{2}$.

1287.- En el dibuix ABCD és una paral·lelogram, $\overline{PB}=10$, $\overline{PC}=8$.

Calculeu la longitud de la diagonal $\overline{BD}$.



Solució:

$\overline{AD}=\overline{PB}+\overline{PC}=18$.

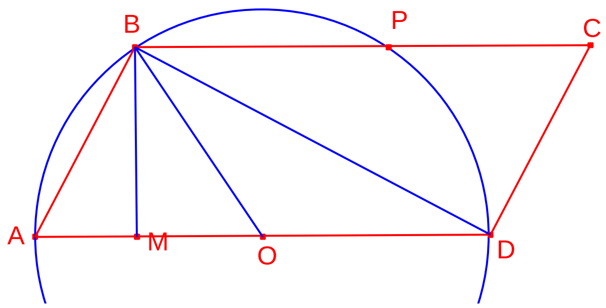
$\overline{OA}=\overline{OB}=9$.

El trapezi ABPD és isòsceles.

Siga Q la projecció de B sobre el segment $\overline{AD}$.

$\overline{AQ}=\dfrac{\overline{AD}-\overline{PB}}{2}=4$.

$\overline{OQ}=\overline{OA}-\overline{AQ}=5$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQO}$:

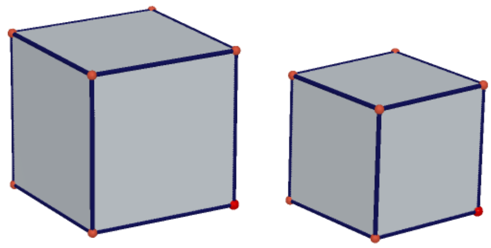
$\overline{BB}=2\sqrt{14}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQD}$:

$\overline{BD}=6\sqrt{7}$.

1288.- Una diagonal d'un cub és igual a la diagonal d'una cara de l'altre cub,

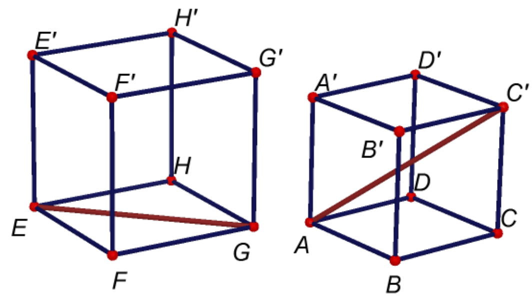
Calculeu la proporció entre les àrees i els volums dels dos cubs.



Solució:

Siga el cub ABCDA'B'C'D' tal que la diagonal és $\overline{AC'} = c$.

Siga el cub EFGHE'F'G'H' tal que la diagonal d'una cara és $\overline{EG} = c$.



Si l'aresta del cub ABCDA'B'C'D' és $\overline{AB} = a$.

$\overline{AC'} = a\sqrt{3}$.

Aleshores, $\overline{AC'} = a\sqrt{3} = c$. Resolent l'equació:

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

L'àrea i el volum del cub ABCDA'B'C'D' són:

$S_1 = 6a^2 = 2c^2$.

$V_1 = a^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}c^3$.

Si l'aresta del cub EFGHE'F'G'H' és $\overline{EF} = b$.

$\overline{EG} = b\sqrt{2}$.

Aleshores, $\overline{EG} = b\sqrt{2} = c$. Resolent l'equació:

$b = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

L'àrea i el volum del cub EFGHE'F'G'H' són:

$S_2 = 6b^2 = 3c^2$.

$V_2 = b^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}c^3$.

La proporció entre les àrees dels cubs és:

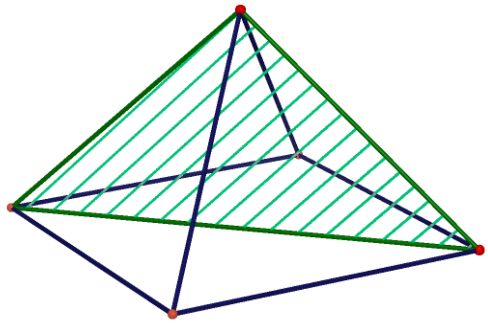
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2c^2}{3c^2} = \frac{2}{3}$.

La proporció entre els volums dels cubs és:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9}c^3}{\frac{\sqrt{2}}{4}c^3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

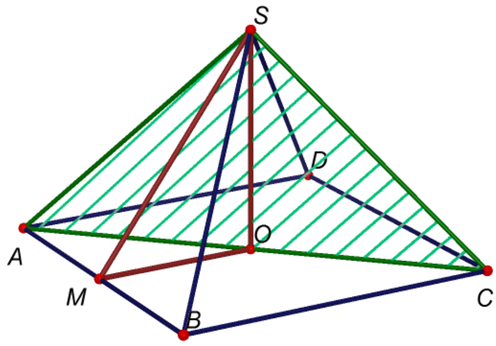
1289.- L'àrea de la secció que resulta de tallar una piràmide quadrangular regular per un plànol que passa per les arestes laterals oposades és igual a $48\sqrt{2}$.
L'aresta de la base és 12.

Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:

Siga ABCDS la piràmide regular de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=12$.
Siga O el centre de la base.
Siga $\overline{OS}=h$ altura de la piràmide.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:



$\overline{AC}=12\sqrt{2}$.
L'àrea de la secció és:
$\frac{1}{2}12\sqrt{2}h=48\sqrt{2}$. Resolent l'equació:
$h=8$.
$\overline{OM}=6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$ l'apotema de la piràmide és:
$\overline{MS}=10$.
L'àrea de la piràmide és_

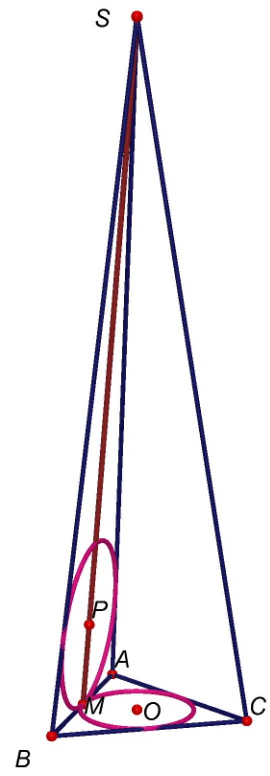
$$S_{ABCDS}=\overline{AB}^2+4\left(\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{MS}\right)=12^2+4\frac{1}{2}12\cdot 10=384.$$

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDS}=\frac{1}{3}\overline{AB}^2\cdot h+\frac{1}{3}12^2\cdot 8=384.$$

1290.- En una piràmide triangular regular el radi de la circumferència inscrita a la base és 2 i el radi de la circumferència inscrita a la cara lateral és 3.

Calculeu la seua àrea i el seu volum:



Solució:

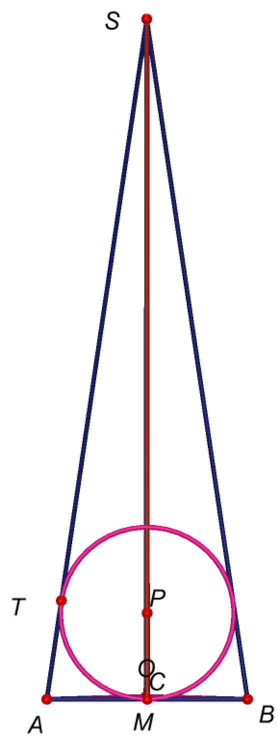
Siga la piràmide regular ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga O el centre de la circumferència inscrita a la base.

Siga P el centre de la circumferència inscrita a la cara $\overset{\Delta}{ABS}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$\overline{OM} = 2$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$.
$\overline{BM} = 2\sqrt{3}$. Aleshores, $\overline{AB} = 4\sqrt{3}$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita a la cara $\overset{\Delta}{ABS}$ i l'aresta $\overline{AS}$.
Siga $x = \overline{PS}$, $\overline{PT} = \overline{PM} = 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TPS}$:
$\overline{TS} = \sqrt{x^2 - 9}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SMA}$, $\overset{\Delta}{STP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{2\sqrt{3}}{3+x} = \frac{3}{\sqrt{x^2-9}}$. Resolent l'equació:

$x = 21$.
$\overline{SM} = \overline{PS} + \overline{PM} = 21 + 3 = 24$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:
$\overline{OS} = \sqrt{24^2 - 2^2} = 2\sqrt{143}$.
L'àrea de la piràmide ABCS és:

$$S_{ABCS} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 24\right) = 156\sqrt{3} \approx 270.20.$$

El volum de la piràmide ABCS és:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2\sqrt{143} = 8\sqrt{429} \approx 165.51.$$