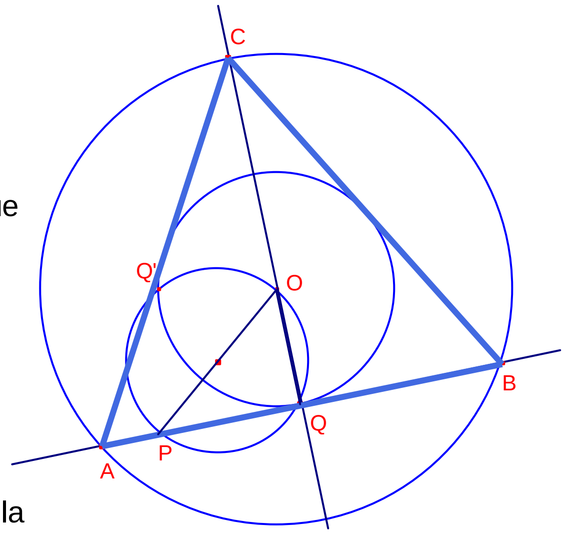
Problemes de Geometria per a l'ESO 13

121.- Donada una circumferència i un punt P interior a la circumferència. Dibuixar el triangle equilàter tal que P pertany al perímetre. Estudieu les solucions depenent de la posició del punt P.



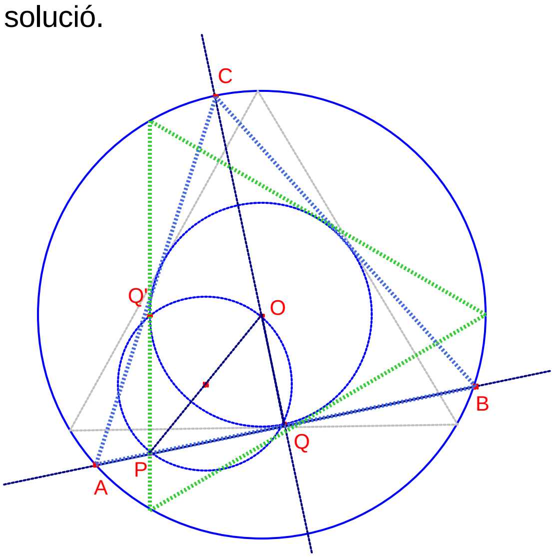
Solució.
Siga la circumferència de centre O.
Siga P un punt en el seu interior.

Suposem el problema resolt. Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que P pertany al costat $\overline{AB}$.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{AB}$. Notem que Q pertany a la circumferència inscrita del triangle i a més a més el triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és rectangle $\angle OQP = 90^o$.

Aleshores, per resoldre el triangle efectuem els següents passos:

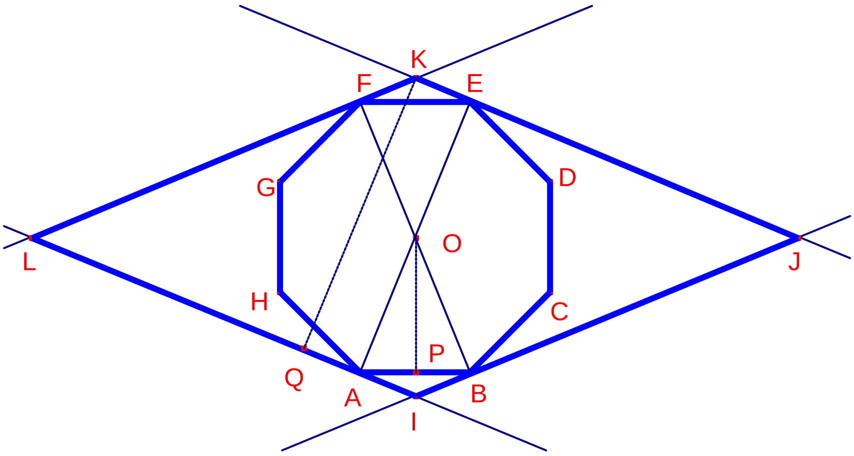
a) Dibuixar un triangle equilàter qualsevol inscrit en la circumferència.
b) Dibuixar la circumferència inscrita a aquest triangle equilàter. Aquesta circumferència també és inscrita a qualsevol triangle equilàter inscrit en la circumferència.
c) Dibuixar la circumferència de diàmetre $\overline{OP}$.
d) La intersecció de les dues circumferències ens dóna el punt Q.
e) Dibuixar la recta PQ. Que talla la circumferència en els punts A, B.
f) Dibuixar la recta mediatriu al segment $\overline{AB}$ que talla la circumferència en el punt C.
g) Dibuixar el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Discussió:
Si el punt P està en el interior de la corona circular formada per la circumferència inicial i la circumferència inscrita al triangle equilàter el problema té dues solucions.
Si el punt P pertany a la circumferència inicial el problema té una solució.
Si el punt O pertany a la circumferència inscrita del triangle equilàter el problema té una solució.
Si el problema pertany al interior de la circumferència inscrita el problema no té solució.



122.- Siga l'octògon regular ABCDEFGH de centre O. Es tracen les rectes perpendiculars per A, B, E i F a $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{EO}$, i $\overline{FO}$, respectivament que formen el quadrilàter IJKL. Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter i l'octògon.

Solució:



Siga $r = \overline{OA}$. Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\angle AOB = \frac{360^o}{8} = 45^o$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPA}$:

$\overline{AP} = r \cdot \cos\frac{45^o}{2}$. Aleshores, $\overline{AB} = 2r \cdot \cos\frac{45^o}{2}$.

$\overline{OP} = r \cdot \sin\frac{45^o}{2}$.

L'àrea de l'octògon regular és:

$$S_{ABCDEFGH} = 8\left(\frac{2r \cdot \cos\frac{45^o}{2} \cdot r \cdot \sin\frac{45^o}{2}}{2}\right) = 8\frac{r^2 \sin 45^o}{2} = 2\sqrt{2}r^2.$$

$\angle AOF = 3 \cdot 45^o = 135^o$. $\angle LAO = \angle LFO = 90^o$.

Aleshores, $\angle KLI = 45^o$.

Siga Q la projecció de K sobre $\overline{LI}$.

IJKL és un rombe de base $\overline{LI} = \overline{KL}$ i altura $\overline{AE} = \overline{QK} = 2r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LQK}$:

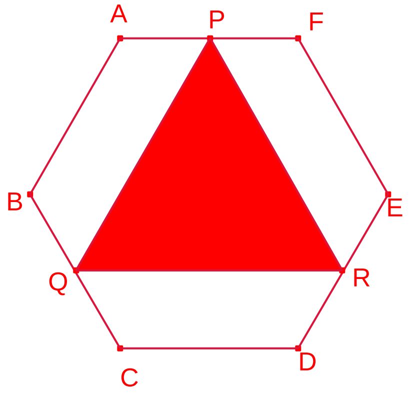
$$\overline{LK} = \frac{\overline{QK}}{\sin 45^o} = \frac{2r}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}r.$$

L'àrea del rombe és:

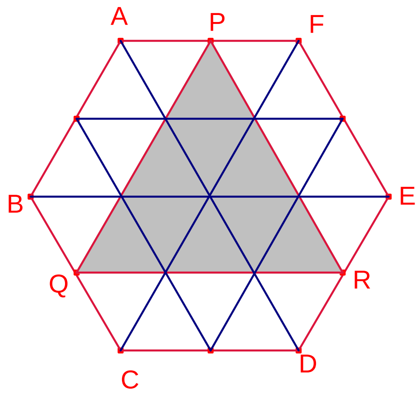
$S_{IJKL} = \overline{LK} \cdot \overline{AE} = 4\sqrt{2}r^2$.

La raó de proporcionalitat entre les àrees és: $\frac{S_{IJKL}}{S_{ABCDEFGH}} = 2$.

123.-
a) Calculeu la proporció entre el perímetre de l'hexàgon ABCDEF i el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.
b) Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon ABCDEF i el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.



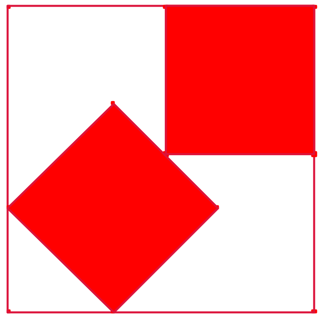
Solució:
a)
Siga $x = \overline{AP}$.
El perímetre $\overset{\Delta}{PQR}$ del triangle és 9x.
El perímetre de l'hexàgon és 12x.
La proporció entre els perímetres és:
$\frac{P_{PQR}}{P_{ABCDEF}} = \frac{9x}{12x} = \frac{3}{4}$.



b)
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ està format per 9 triangles equilàters menuts.
L'àrea de l'hexàgon ABCD està format per 24 triangles equilàter menuts.

La proporció entre les àrees és:
$\frac{S_{PQR}}{S_{ABCDEF}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

124.- En la següent figura els dos quadrats interiors són iguals. Si el quadrat exterior té costat c, calculeu el costat dels quadrats interiors.



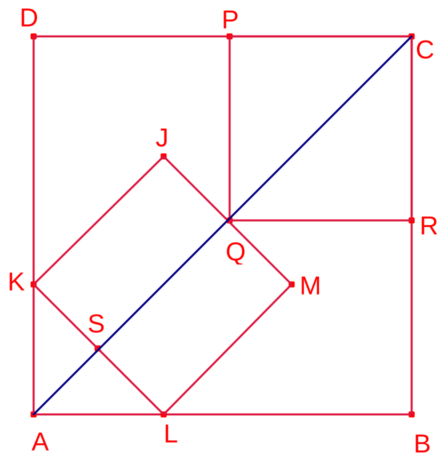
Solució:

Siga el quadrat exterior ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

La diagonal mesura $\overline{AC} = c\sqrt{2}$.

Siga $x = \overline{PC}$ costat dels quadrats CPQR i JKLM.

Siga S el punt mig del costat $\overline{KL}$.



$\overline{CQ} = x\sqrt{2}$

$\overline{QS} = \overline{PC} = x$

El triangle $\overset{\Delta}{ASL}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:

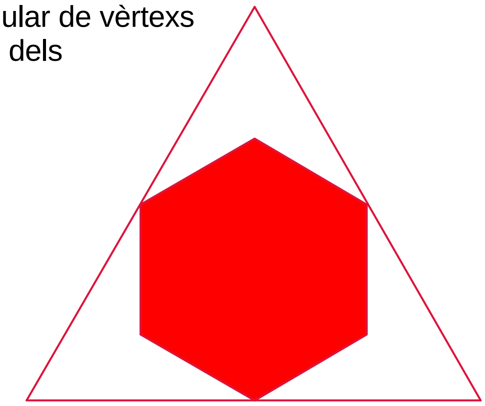
$\overline{AS} = \overline{SL} = \dfrac{x}{2}$.

$\overline{AC} = \overline{AS} + \overline{QS} + \overline{CQ}$.

$c\sqrt{2} = \dfrac{x}{2} + x + x\sqrt{2}$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = \left(6\sqrt{2} - 8\right)c$.

125.- La figura consta d'un triangle equilàter i un hexàgon regular de vèrtexs els punts mig del triangle. Calculeu la proporció de les àrees i dels perímetres.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ i l'hèxagon regular HIJKLM de centre O.

Notem que $\overline{OL} = 2 \cdot \overline{OB}$.

Aleshores, $\overline{BK} = \overline{OL}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BPK}$ és la meitat d'un triangle equilàter de costat $\overline{OL} = \overline{BK}$.

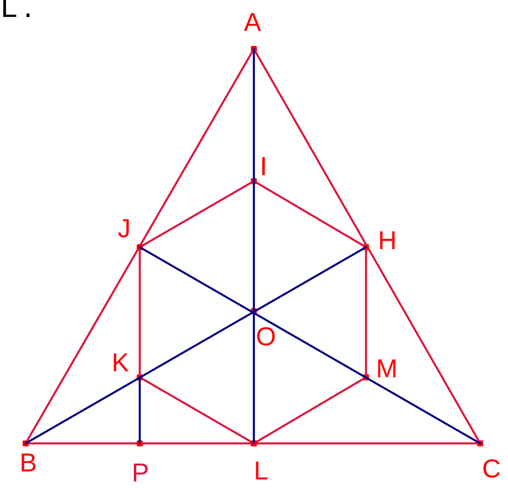
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BLK}$ és l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{OKL}$.

$S_{HIJKLM} = 6 \cdot S_{OKL}$.

$S_{ABC} = 6 \cdot S_{OKL} + 6 \cdot S_{BLK} = 12 \cdot S_{OKL}$.

Aleshores, la proporció d'àrees és:

$$\frac{S_{HIJKLM}}{S_{ABC}} = \frac{6 \cdot S_{OKL}}{12 \cdot S_{OKL}} = \frac{1}{2}.$$



Siga $\overline{OL} = x$, costat de l'hexàgon.

$\overline{OB} = 2x$.

Per tant, $\overline{BL} = x\sqrt{3}$.

El perímetre de l'hexàgon és:

$P_{HIJKLM} = 6x$

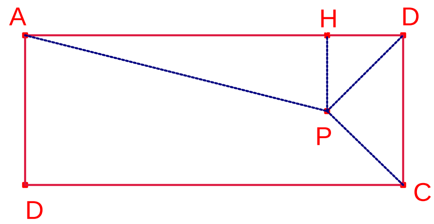
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$P_{ABC} = 6 \cdot \overline{BL} = 6x\sqrt{3}$

Aleshores, la proporció de perímetres és:

$$\frac{P_{HIJKLM}}{P_{ABC}} = \frac{6x}{6x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

126.-Siga ABCD un rectangle tal que $\overline{AB} = 2$ i $\overline{BC} = 5$.
Siga P un punt interior al rectangle tal que $\angle CPD = 90º$ i $\overline{CP} = \overline{DP}$.
Calculeu la longitud de $\overline{PA}$.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{CPD}$ és rectangle i isòsceles.
Aleshores, $\overline{DP} = \sqrt{2}$.

Siga H la projecció de P sobre $\overline{AD}$, $\overline{PH} = \frac{\overline{CD}}{2} = 1$.

El triangle $\overset{\Delta}{PHD}$ és rectangle i isòsceles, aleshores, $\overline{DH} = 1$.
$\overline{AH} = \overline{AD} - \overline{DH} = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APH}$:
$\overline{AP} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

127.- Siga ABCD un quadrat de costat 5. Siga P un punt en el seu interior tal que $\overline{PA}=3$ i $\overline{PB}=4$. Determineu les longituds de $\overline{PC}$ i $\overline{PD}$.

Solució:

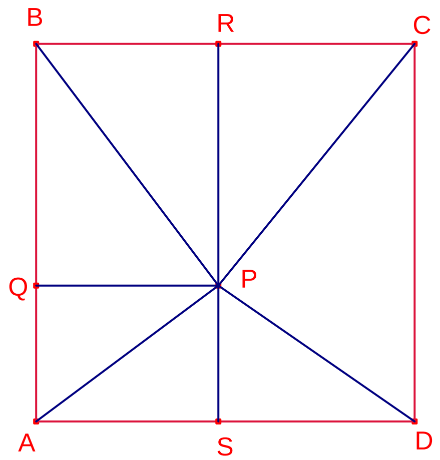
El triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és rectangle ja que $\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$.

Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$ del quadrat.

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{PQB}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PQ}}{4}=\frac{3}{5}$, aleshores, $\overline{PQ}=\frac{12}{5}$

$\frac{\overline{BQ}}{4}=\frac{4}{5}$, aleshores, $\overline{BQ}=\frac{16}{5}$



Siga R la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$ del quadrat.

$\overline{RC}=\overline{CB}-\overline{BR}=5-\frac{12}{5}=\frac{13}{5}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PRC}$:

$$\overline{PC}=\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{13}{5}\right)^2}=\sqrt{17}\,.$$

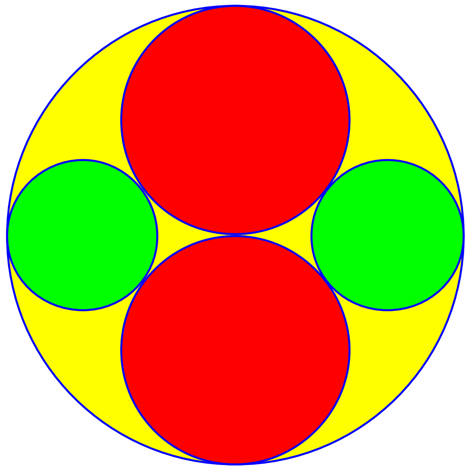
Siga S la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$ del quadrat.

$\overline{PS}=\overline{AB}-\overline{BQ}=5-\frac{16}{5}=\frac{9}{5}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PSD}$:

$$\overline{PD}=\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2+\left(\frac{13}{5}\right)^2}=\sqrt{10}\,.$$

128.- Les circumferències mitjanes passen pel centre i són tangents a la gran. Les circumferències menudes són tangents a la gran i a les mitjanes.
Si el radi de la gran és R calculeu l'àrea que hi ha entre la circumferència gran i les altres 4 interiors.



Solució:

Siga $R = \overline{OC}$ radi de la circumferència gran.

Siga $r = \overline{BC}$ radi de les circumferències menudes.

El triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és rectangle.

$\overline{OA} = \frac{\overline{OC}}{2} = \frac{R}{2}$, és el radi de les circumferències mitjanes.

$\overline{AB} = \frac{R}{2} + r$.

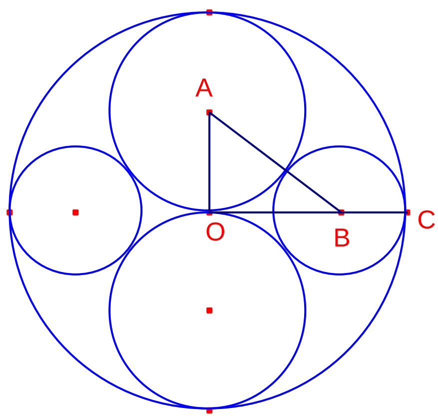
$\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = R - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\left(\frac{R}{r} + r\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R - r)^2.$$

$Rr = R^2 - 2Rr$. Resolent l'equació en la incògnita r:

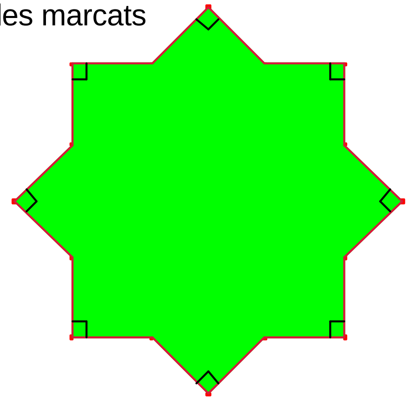
$$r = \frac{R}{3}.$$



L'àrea que cerquem és:

$$S = \pi R^2 - \left(2\left(\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) + 2\left(\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\right)\right) = \frac{5}{18}\pi R^2.$$

129.- Tots els costats d'aquesta estrella són iguals a c i els angles marcats són rectes.
Calculeu l'àrea de l'estrella.



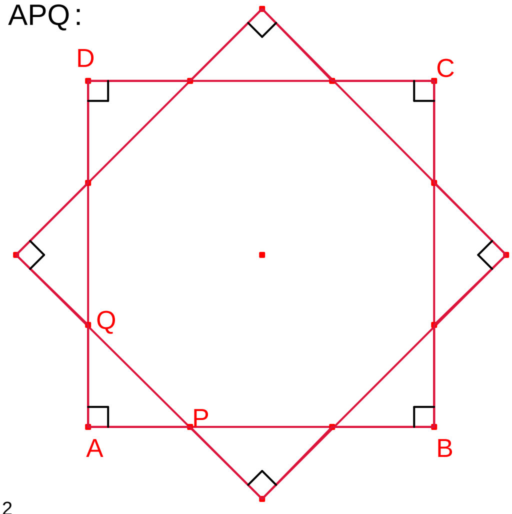
Solució:

$\overline{AP} = c$.

L'àrea de l'estrella està formada per l'àrea del quadrat ABCD i 4 vegades l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$\overline{PQ} = c\sqrt{2}$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és:

$S_{APQ} = \dfrac{c^2}{2}$.

Calculem el costat del quadrat ABCD:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AP} + \overline{PQ} = 2c + c\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})c$.

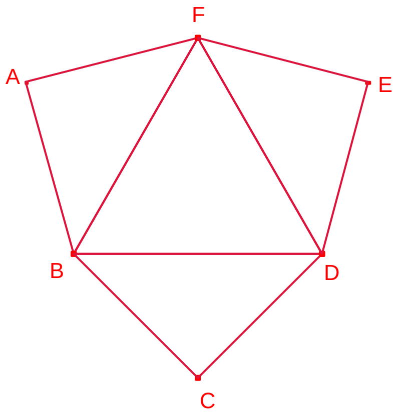
L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = \left((2+\sqrt{2})c\right)^2 = (6+4\sqrt{2})c^2$.

L'àrea de l'estrella és:

$S = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{APQ} = (6+4\sqrt{2})c^2 + 2c^2 = (8+4\sqrt{2})c^2$.

130.- En la següent figura el triangle $\overset{\Delta}{BDF}$ és equilàter i els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ són rectangles i isòsceles.
Proveu que $\overline{AE} = \overline{CF}$.



Solució 1:

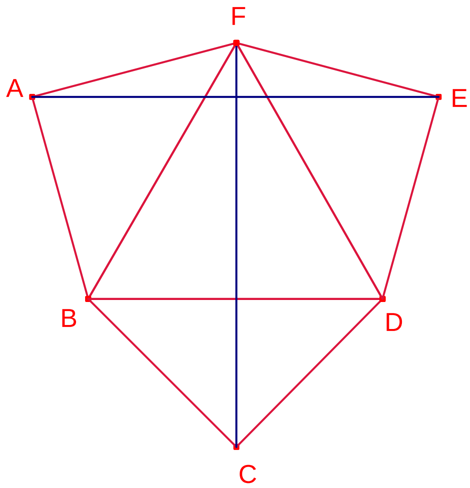
Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són iguals, per tant, $\overline{AE} = \overline{AC}$.
$\angle AFE = 150^o$, aleshores, $\angle AFC = 75^o$.

$\angle BAF = 90^o$, $\angle BAC = 15^o$, aleshores, $\angle FAC = 75^o$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{AFC}$ és isòsceles, $\overline{AC} = \overline{CF}$.
Aleshores, $\overline{AE} = \overline{CF}$.

Solució 2:
Siga $x = \overline{AB}$.
$\angle AFE = 150^o$, $\angle CDF = 105^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{BF} = x\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$:
$\overline{AE}^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 150^o$.
$\overline{AE}^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)x^2$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDF}$:
$\overline{CF}^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 105^o$.
$\overline{CF}^2 = 3x^2 - 2x^2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right)$.
$\overline{CF}^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)x^2$.
Aleshores, $\overline{AE} = \overline{CF}$.