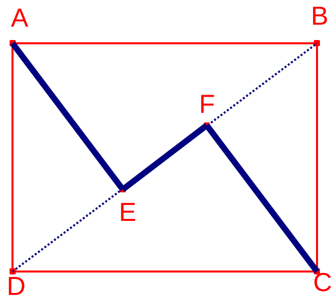
Problemes de Geometria per a l'ESO 130



1291.- En un rectangle ABCD de costats 6 i 8, els punts E i F són els peus de les perpendiculars des de A i C sobre la diagonal $\overline{BD}$. Calculeu la longitud de la línia trencada AEFC.
XIII Concurso intercentros Madrid.

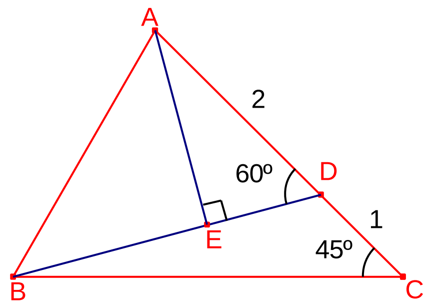
Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAD}$:
$\overline{BD} = 10$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{BAD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{AE}}{6} = \frac{8}{10}$, $\frac{\overline{DE}}{6} = \frac{6}{10}$. Aleshores:
$\overline{AE} = \frac{24}{5}$, $\overline{DE} = \frac{18}{5}$.
La longitud de la línia trencada és:
$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{CF} = 2\overline{AE} + \left(10 - 2\overline{DE}\right) = \frac{62}{5}$.

1292.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura $\overline{AD}=2$, $\overline{DC}=1$ i el punt E és el peu de la perpendicular des de A a la recta $\overline{BD}$. Si l'angle $\angle ACB=45^o$ i $\angle ADE=60^o$, calculeu la mesura de l'angle $\angle BAC$.

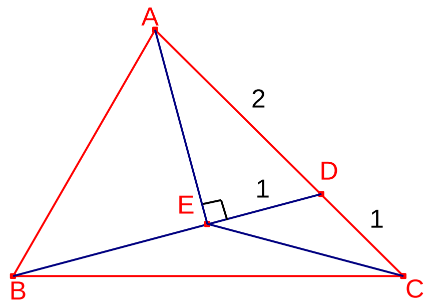
XIII Concurso intercentros Madrid.



Solució:

$\angle EAD=30^o$.

$\overline{DE}=1$.



$\angle BDC=120^o$

$\angle DBC=180^o-(\angle BDC+45^o)=15^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{ECD}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle ECD=30^o$.

$\angle ECB=45^o-30^o=15^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és isòsceles, aleshores:

$\overline{CE}=\overline{BE}$

El triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és isòsceles, aleshores:

$\overline{CE}=\overline{AE}$.

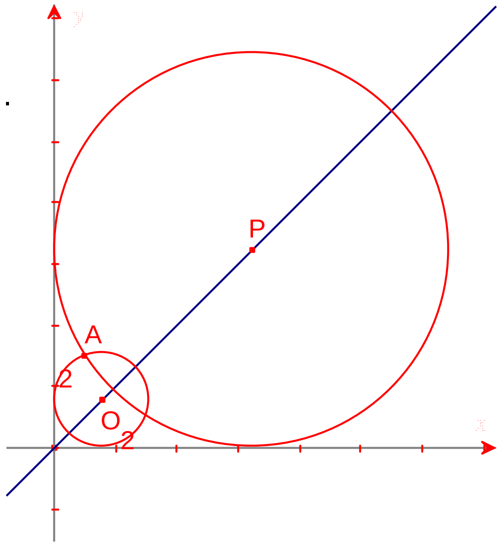
En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEA}$, $\overline{BE}=\overline{AE}$, aleshores, és isòsceles, per tant:

$\angle BAE=45^o$.

$\angle BAC=\angle BAE+\angle EAD=45^o+30^o=75^o$.

1293.- Dues circumferències distintes són tangents als eixos de coordenades i ambdues passen pel punt $(1,3)$.

Determineu la suma dels radis de les dues circumferències.



Solució 1:
Vegem que només hi ha dues circumferències tangents als eixos de coordenades i que passen pel punt $(1,3)$.

Una circumferència tangent als eixos té el centre en la bisectriu del primer quadrant. Siga $O(r,r)$ el centre de la circumferència.

El radi de la circumferència és r.

$A(1,3)$ pertany a la circumferència, aleshores:

$\overline{OA}=r$.

$(1-r)^2+(3-r)^2=r^2$.

$r^2-8r+10=0$. Resolent l'equació els radis de les dues circumferències són:

$r=4+\sqrt{6},\quad 4-\sqrt{6}$.

La suma dels dos radis és 8.

Solució 2:
Una circumferència tangent als eixos té el centre en la bisectriu del primer quadrant. Siga $O(r,r)$ el centre d'una de les circumferències. El radi de la circumferència és r.
Siga $P(s,s)$ el centre de l'altra circumferència. El radi de la circumferència és s.

$A(1,3)$ pertany a les dues circumferències, aleshores:

$(1-r)^2+(3-r)^2=r^2$.

$(1-s)^2+(3-s)^2=s^2$.

Simplificant:

$r^2-8r+10=0$.

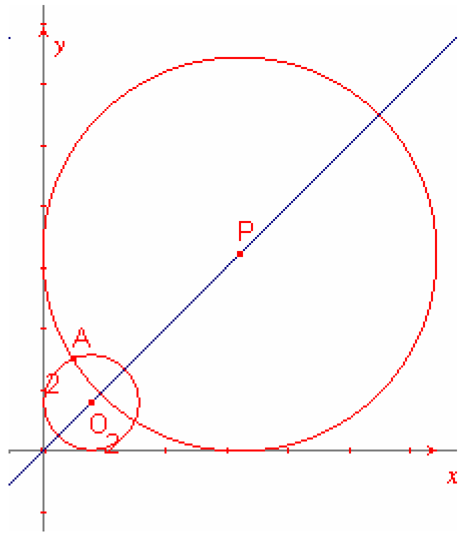
$s^2-8s+10=0$.

Restant ambdues expressions:

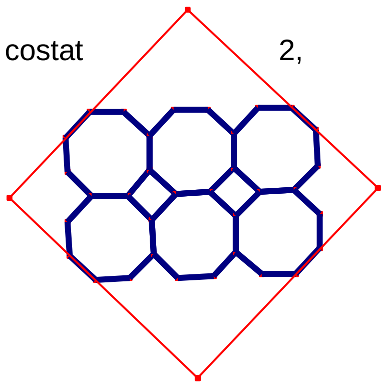
$(r+s)(r-s)+8(-r+s)=0$. Factoritzant l'equació:

$(r-s)(r+s-8)=0$. Com que $r-s\neq 0$, aleshores:

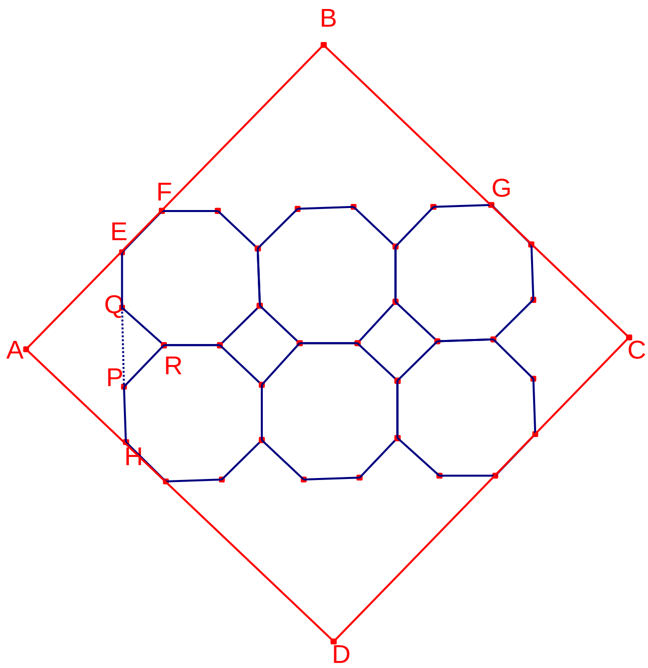
$r+s=8$.



1294.- El quadrat de la figura té sis octògons regulars iguals de costat 2, tal que els octògons colindants comparteixen un costat.
Els octògons dels extrems tenen un costat sobre el quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:



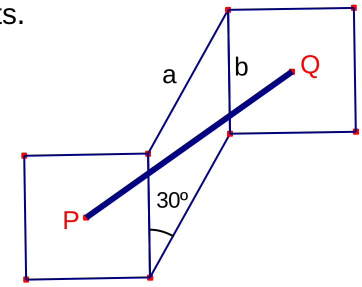
Siga ABCD el quadrat exterior.
L'angle interior de l'octògon regular mesura $\angle FEG = 135^{o}$.
$\angle PQR = 360 - 2 \cdot 135^{o} = 90^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQR}$:
$\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$.
$\overline{EH} = 2\overline{EQ} + \overline{PQ} = 4 + 2\sqrt{2}$.
$\overline{EG} = 3\overline{EQ} + 2\overline{PQ} = 6 + 4\sqrt{2}$.

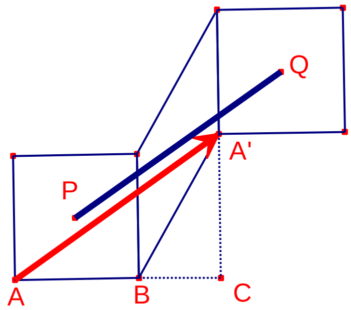
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AEH}$:
$\overline{AE} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{FBG}$:
$\overline{BF} = \left(6 + 4\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = 4 + 3\sqrt{2}$.
$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{BF} = 2 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 + 3\sqrt{2} = 8 + 5\sqrt{2}$.
L'àrea del quadrat ABCD és:
$S_{ABCD} = \overline{AB}^2 = \left(8 + 5\sqrt{2}\right)^2 = 114 + 80\sqrt{2}$.

1295.- Siga el paral·lelogram de costats a, b i angle agut 30º.
Sobre els costats b i cap a l'exterior es dibuixen dos quadrats.
Determineu la distància entre els centres dels quadrats.



Solució:
Els dos quadrats són iguals i tenen el costats paral·lels.
E



El vector $\overrightarrow{AA'}$ trasllada el quadrat inferior en el superior.
Trasllada el punt P en Q.
Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{AA'}$.
Siga C la projecció de A' sobre la recta AB.
$\angle A'BC = 60^\circ$.

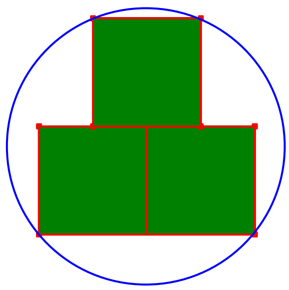
$\overline{BC} = \frac{a}{2}$, $\overline{A'C} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overline{AC} = b + \frac{1}{2}a$

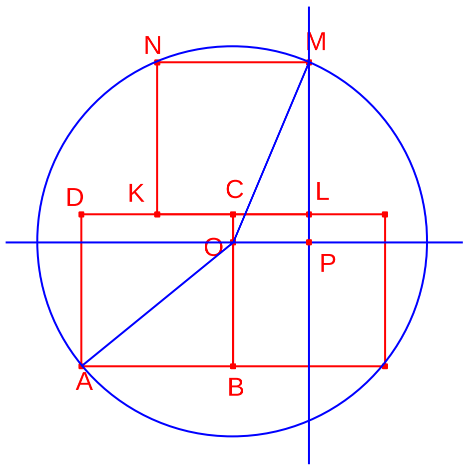
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACA'}$:

$$\overline{PQ} = \overline{AA'} = \sqrt{\left(b + \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + ab + b^2}\ .$$

1296.- En la figura una circumferència està circumscrita a tres quadrats iguals de costat c.
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:
Siguen ABCD, KLMN quadrats de costat c.
C és el punt mig del costat $\overline{KL}$.
Siga O el centre de la circumferència.
Siga P la projecció de O sobre la recta LM.
Siga $\overline{OA}=\overline{OM}=r$ radis de la circumferència.
Siga $\overline{OB}=x$.
$\overline{PM}=2c-x$.

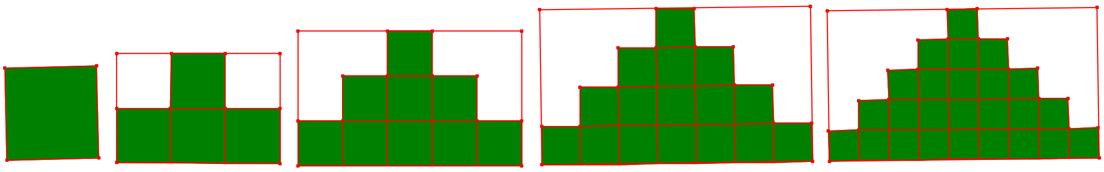


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$r^2=c^2+x^2$.

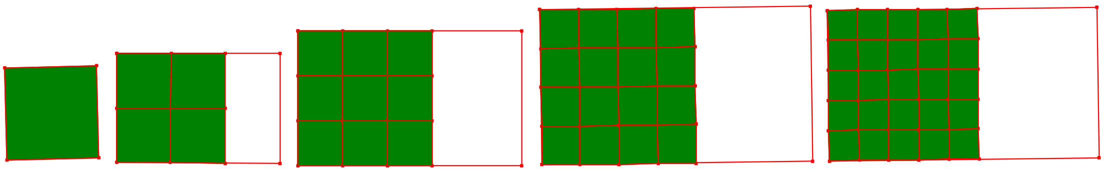
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:
$r^2=(2c-x)^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2$.

Considerem el sistema format per les dues equacions:
$\begin{cases} r^2=c^2+x^2 \\ r^2=(2c-x)^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=\frac{13}{16}c \\ r=\frac{5\sqrt{17}}{16}c \end{cases}$.

1287.- En la següent seqüència de rectangles calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrats i la del rectangle exterior si hi ha apilats n files de quadrats.



Solució:
Podem reordenar els quadrats de la forma següent:



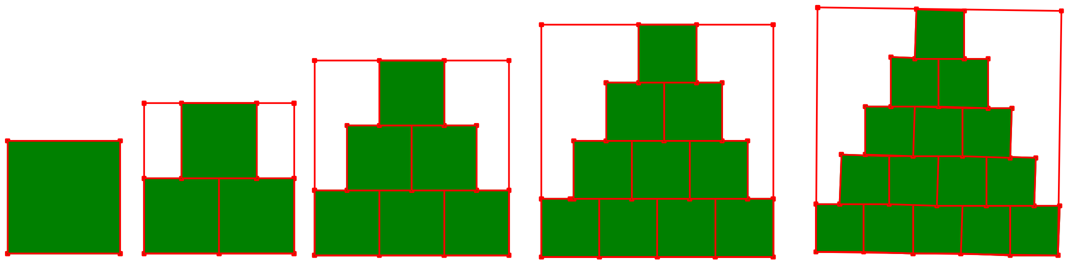
$n =$ número de files.

En el segon rectangle hi ha dos files de quadrats $n = 2$ hi l'àrea dels quadrats és $(2)^2$, l'àrea del rectangle exterior és $2\cdot(2\cdot 2-1)$.

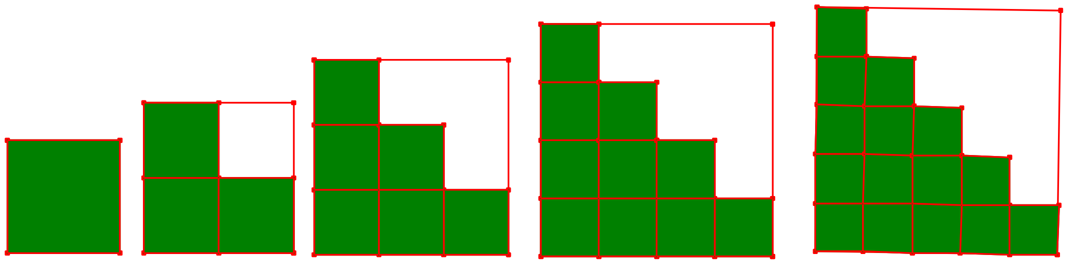
La proporció entre la suma de les àrees dels quadrats i la del rectangle exterior si hi ha apilats n files de quadrats és:

$$P_n = \frac{n^2}{n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}.$$

1298.- En la següent seqüència de rectangles calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrats i la del quadrat exterior si hi ha apilats n files de quadrats.



Solució:
Podem reordenar els quadrats de la forma següent:

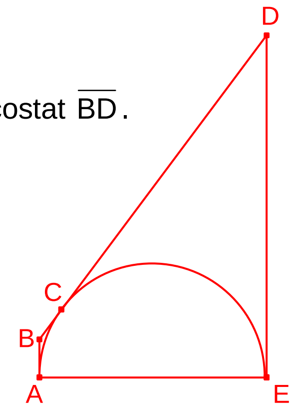


El nombre de quadrats que formen les files són;
1, 3, 6, 10, ...
Formen la successió de nombres triangulars.

La proporció entre la suma de les àrees de les files de quadrats iguals i la del quadrat exterior si hi ha apilats n files de quadrats és:

$$P_n = \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

1299.-Siga el trapezi ABDE, rectangle.



Una semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}=6$ és tangent en C al costat $\overline{BD}$.
Si $\overline{BD}=10$ calculeu l'àrea del trapezi ABDE.

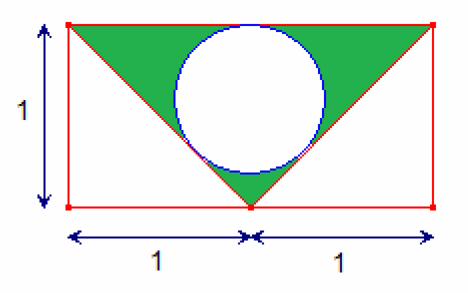
Solució:
A i E són punts de tangència de la semicircumferència amb les rectes AB i DE, respectivament, aleshores:
$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{DE}=\overline{CD}$.
L'àrea del trapezi ABDE és:

$$S_{ABDE}=\frac{\overline{DE}+\overline{AD}}{2}\overline{AE}.$$

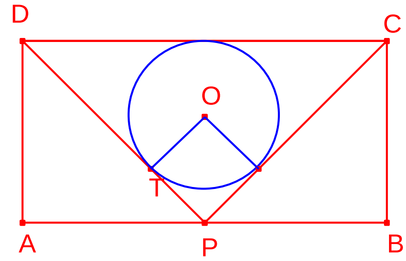
$\overline{DE}+\overline{AB}=\overline{CD}+\overline{BC}=\overline{BD}=10$.

$$S_{ABDE}=\frac{\overline{DE}+\overline{AD}}{2}\overline{AE}=\frac{10}{2}6=30.$$

1300.- En la figura calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga el rectangle ABCD.
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ són isòsceles aleshores:
$\angle CPD = 90^{o}$.
$\overset{\Delta}{DPC}$ és rectangle.
El radi de la circumferència inscrita és:



$$r = \overline{OT} = \frac{\overline{PC} + \overline{PD} - \overline{CD}}{2}.$$

$$r = \overline{OT} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:
$\overline{PD} = \overline{PC} = \sqrt{2}$.

L'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPC}$ menys l'àrea del cercle de radi r:

$$S = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 - \pi\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 1 - 3\pi + 2\pi\sqrt{2} \approx 0.461.$$