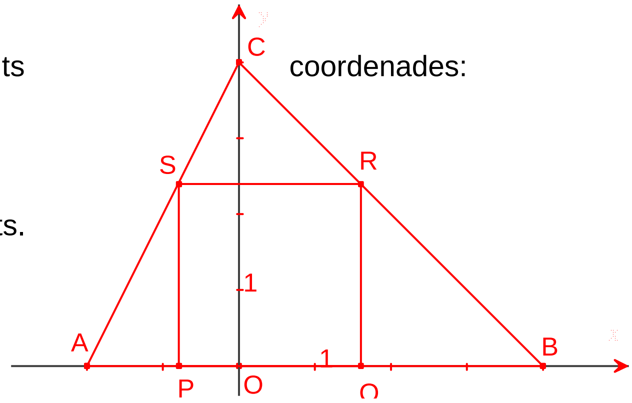
Problemes de Geometria per a l'ESO 131

1301.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de coordenades $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $C(0,4)$.
Determineu les coordenades dels vèrtexs del quadrat inscrit en el triangle que té una base sobre el costat $\overline{AB}$.

Solució:
Siga el quadrat PQRS de costat c amb les següents coordenades:
$P(x,0)$, $Q(x+c,0)$, $R(x+c,c)$, $S(x,c)$.



$\overline{PB}=4-(x+c)$, $\overline{AP}=x+2$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{COB}$, $\overset{\Delta}{RQB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{4-x-c}=\frac{4}{4}=1 \qquad (1)$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOC}$, $\overset{\Delta}{APS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{x+2}=\frac{4}{2}=2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{array}{l}\dfrac{c}{4-x-c}=1\\ \dfrac{c}{x+2}=2\end{array}$$

. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-4}{5}\\ c=\dfrac{12}{5}\end{cases}.$$

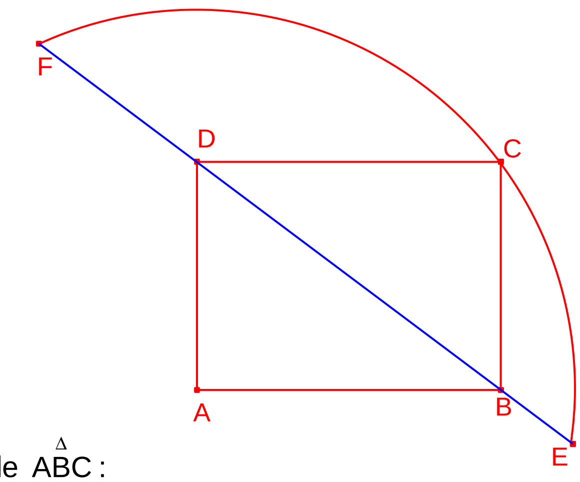
Les coordenades dels vèrtexs del quadrat PQRS són:

$$P\left(\frac{-4}{5},0\right),\ Q\left(\frac{8}{5},0\right),\ R\left(\frac{8}{5},\frac{12}{5}\right),\ S\left(\frac{-4}{5},\frac{12}{5}\right).$$

1302.- Siga el rectangle ABCD $\overline{AB}=20$, $\overline{AD}=15$.

L'arc de centre A que passa per C talla la recta diagonal BD en els punts E, F.

Determineu la mesura de la corda $\overline{EF}$.



Solució:

Siga M la projecció de A sobre la recta BD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=\overline{BD}=25$, radi de l'arc.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és:0

$\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot 25=\frac{1}{2}20\cdot 15$. Resolent l'equació:

$\overline{AM}=12$.

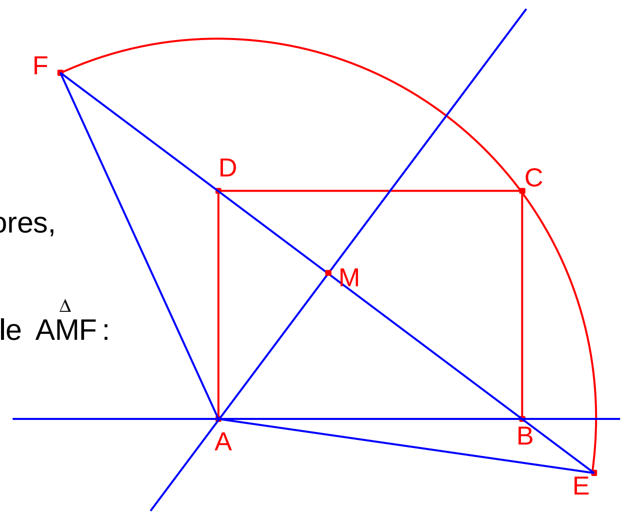
$\overline{AF}=\overline{AE}=25$, el triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles, aleshores,

$\overline{FM}=\overline{EM}$.

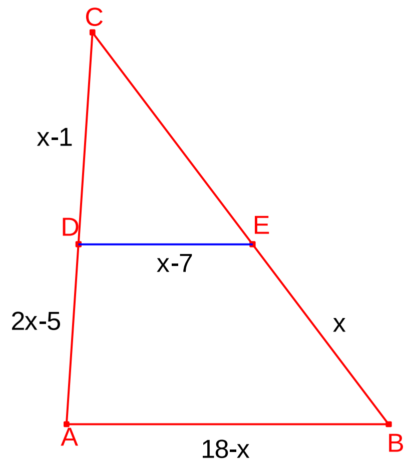
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMF}$:

$\overline{FM}=\sqrt{25^2-12^2}=\sqrt{481}$.

$\overline{EF}=2\cdot\overline{FM}=2\sqrt{481}$.



1303.- En el dibuix el segment $\overline{DE}$ és paral·lels al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Determineu el valor de x.

Solució:

$\begin{cases} x-7>0 \\ 18-x>0 \end{cases}$, resolent el sistema $7<x<18$.

$\overline{AC}=3x-6$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DEC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{18-x}{3x-6}=\frac{x-7}{x-1}.$$

$2x^2-23x+30=0$. Resolent l'equació:

$$x=10,\ x=\frac{3}{2}.$$

$x=\frac{3}{2}$ no és solució ja que $7<x<18$.

Si $x=10$:

$\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=15$, $\overline{DC}=9$ $\overline{AC}=24$.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}.$$

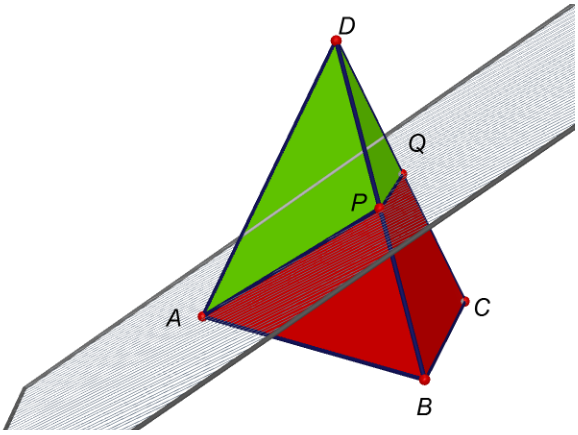
$\frac{10}{15}=\frac{\overline{EC}}{9}$. Resolent l'equació:

$\overline{EC}=6$.

$\overline{BC}=16$.

En aquest cas, $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$. Per tant, no seria un triangle.
Aleshores el problema no té solució.

1304.- Siga el tetraedre ABCD.



Siguen P i Q els punts migs de les arestes $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, respectivament.
La secció que passa pels punts A, P, Q divideix el tetraedre en dues parts.
Determineu la proporció entre els volums de les dues parts.

Solució:

$\overline{PQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.
El plànol que passa pels punts A, P, Q divideix el tetraedre ABCD en dues piràmides, PQDA i BCQPA de bases $\overset{\Delta}{PQD}$, BCQP, respectivament.
Les dues piràmides tenen la mateixa altura h sobre les bases anteriors.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{PQD}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$$S_{PQD} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{BCD} = \frac{1}{4} S_{BCD}.$$

$$S_{BCQP} = S_{BCD} - S_{PQD} = \frac{3}{4} S_{BCD}.$$

El volum de la piràmide PQDA és:

$$V_{PQDA} = \frac{1}{3} S_{PQD} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{1}{4} S_{BCD} \cdot h..$$

El volum de la piràmide BCQPA és:

$$V_{BCQPA} = \frac{1}{3} S_{BCQD} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{3}{4} S_{BCD} \cdot h.$$

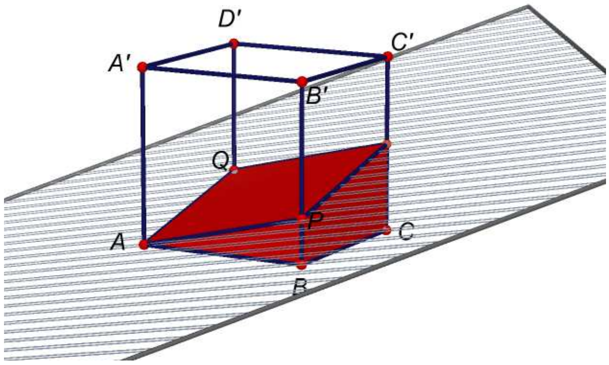
La proporció entre els dos volums és:

$$\frac{V_{PQDA}}{V_{BCQPA}} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{4} S_{BCD} \cdot h}{\frac{1}{3}\frac{3}{4} S_{BCD} \cdot h} = \frac{1}{3}.$$

1305.- Siga el cub ABCDA'B'C'D'.

Siguen P i Q en les arestes $\overline{BB'}$, $\overline{DD'}$, respectivament tal que $\overline{BP} = \frac{1}{4}\overline{BB'}$, $\overline{DQ} = \frac{1}{4}\overline{DD'}$.

La secció del cub que passa pels punts A, P, Q divideix el cub en dues parts.
Determineu la proporció entre els volums de les dues parts.



Solució:

Siga $\overline{AB} = a$, aresta del cub.

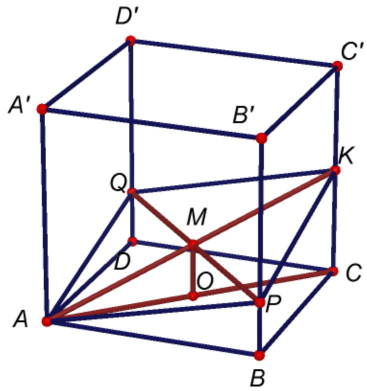
El plànol que passa pels punts A, P, Q talla l'aresta $\overline{CC'}$ en el punt K.

Siga M la intersecció dels segments $\overline{PQ}$, $\overline{AK}$.
Siga O el centre de la base ABCD.

$\overline{OM} = \frac{1}{4}a$.,

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOM}$, $\overset{\Delta}{ACK}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{CK} = \frac{1}{2}a$.



El plànol que passa pels punts A, P, Q divideix el cub en dos cubs truncats.
El volum del cub truncat ABCDPKQ és:

$$V_1 = S_{ABCD}\left(\frac{\overline{BP}+\overline{CK}+\overline{DQ}}{4}\right) = a^2\,\frac{\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a}{4} = \frac{1}{4}a^3.$$

El volum del cub truncat A'B'C'D'APKQ és:

$$V_2 = V_{cub} - V_1 = a^3 - \frac{1}{4}a^3 = \frac{3}{4}a^3.$$

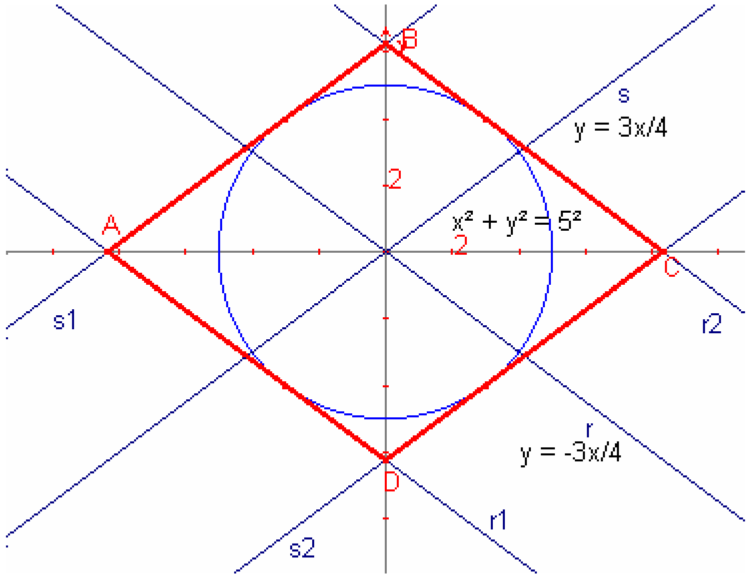
La proporció entre els dos volums és:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{\frac{3}{4}a^3} = \frac{1}{3}.$$

1306.- Donada la circumferència $x^2 + y^2 = 25$ i les rectes $r \equiv 3x + 4y = 0$, $s \equiv 3x - 4y = 0$. Determineu l'àrea del paral·lelogram format per les rectes tangents a la circumferència paral·leles a r, s.

Solució:

La circumferència té centre $O(0, 0)$ i radi $r = 5$.



El paral·lelogram que es forma és un rombe.

Les rectes paral·leles a r tenen equació: $r_d \equiv 3x + 4y + d = 0$.

La distància del centre O a la recta tangent és igual al radi:

$\left| \frac{d}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 5$. Resolent l'equació:

$d = 25, -25$. Les dues rectes tangents són:

$r_1 \equiv 3x + 4y + 25 = 0$,

$r_2 \equiv 3x + 4y - 25 = 0$.

Les rectes paral·leles a s tenen equació: $s_d \equiv 3x - 4y + d = 0$.

La distància del centre O a la recta tangent és igual al radi:

$\left| \frac{d}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = 5$. Resolent l'equació: $d = 25, -25$. Les dues rectes tangents són:

$s_1 \equiv 3x - 4y + 25 = 0$, $r_2 \equiv 3x - 4y - 25 = 0$.

Siga A el vèrtex del rombe intersecció de $r_1 \equiv 3x + 4y + 25 = 0$, $s_1 \equiv 3x - 4y + 25 = 0$.

Considerem el sistema format per les dues rectes:

$\begin{cases} 3x + 4y + 25 = 0 \\ 3x - 4y + 25 = 0 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} x = -\frac{25}{3} \\ y = 0 \end{cases}$. Les coodenades de A són $A\left(-\frac{25}{3}, 0\right)$.

Siga B el vèrtex del rombe intersecció de $r_2 \equiv 3x + 4y - 25 = 0$, $s_1 \equiv 3x - 4y + 25 = 0$.

Considerem el sistema format per les dues rectes:

$\begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 3x - 4y + 25 = 0 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{25}{4} \end{cases}$. Les coodenades de B són $B\left(0, \frac{25}{4}\right)$.

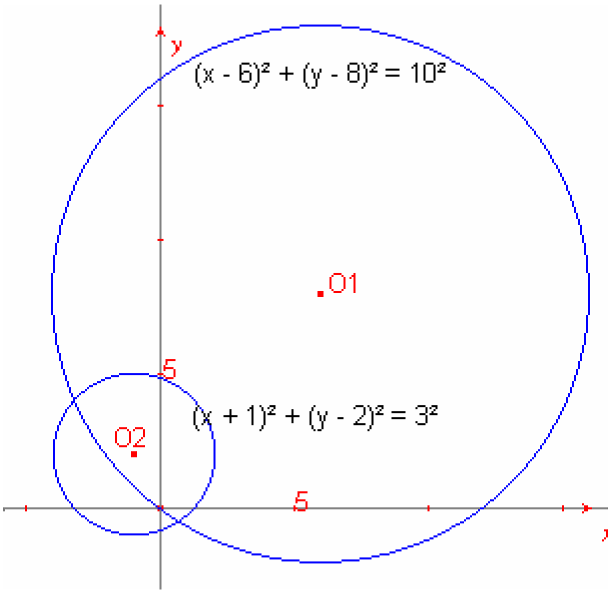
$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \frac{125}{12}.$$

L'altura del rombe sobre qualsevol base és igual al diàmetre de la circumferència.

L'àrea del rombe és: $S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot 2r = \frac{125}{12} 2 \cdot 5 = \frac{625}{6}$.

1307.- Estudieu la posició relativa de les circumferències $C_1 \equiv x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0$,
$C_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Solució:



Completant quadrats les equacions de les circumferències són:

$C_1 \equiv (x-6)^2 + (y-8)^2 = 10^2$, el centre és $O_1(6, 8)$ i el radi $r_1 = 10$.

$C_2 \equiv (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$, el centre és $O_2(-1, 2)$ i el radi $r_2 = 3$.

La distància entre els centres és:

$\overline{O_1O_2} = \sqrt{(6+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{85}$.

$r_1 + r_2 = 13$.

$r_1 - r_2 = 7$.

$r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2}$, aleshores, les circumferències són secants.

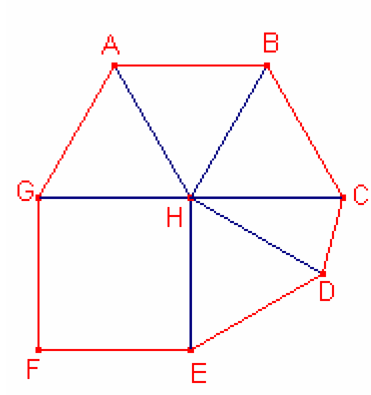
Si resolem el sistema format per les dues circumferències ens dóna els punts on es tallen les dues circumferències.

$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = 10^2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-106 - 36\sqrt{21}}{85} \\ y = \dfrac{152 + 42\sqrt{21}}{85} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{-106 + 36\sqrt{21}}{85} \\ y = \dfrac{152 - 42\sqrt{21}}{85} \end{cases}.$$

1308.- Siga l'heptàgon ABCDEFG.

Siga H un punt interior tal que divideix l'heptàgon en un quadrat, quatre triangles equilàters i els triangle $\overset{\Delta}{HCD}$. Calculeu la mesura de l'angle $\angle HDC$.



Solució:

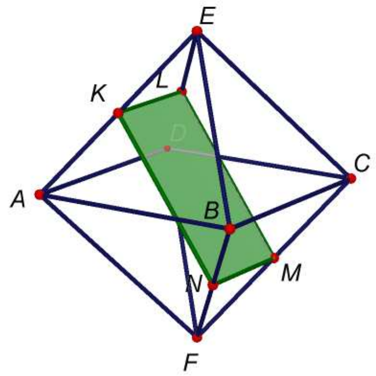
El triangle $\overset{\Delta}{HCD}$ és isòsceles $\overline{CH} = \overline{DH} = \overline{AB}$.

$\angle CHD = 360º - (\angle EHG + 4\angle AHG) = 360º - (90º + 4 \cdot 60º) = 30º$.

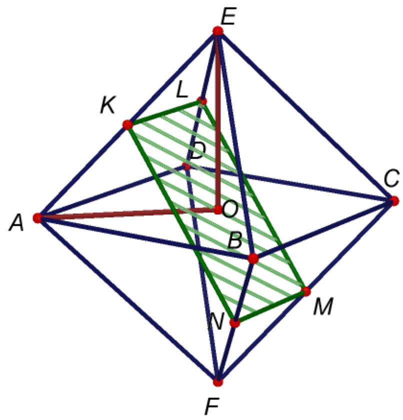
$\angle HDC = \dfrac{180º - \angle CHD}{2} = \dfrac{180º - 30º}{2} = 75º$.

1309.- Siga l'octaedre regular ABCDEF d'aresta a.

Siguen K, L, M, N els punts migs de les arestes $\overline{AE}$, $\overline{DE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, respectivament.
Calculeu l'àrea del paral·lelogram KLMN.



Solució:
Siga O el centre de l'octaedre regular.
O és el centre del paral·lelogram KLMN.



$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}a$.

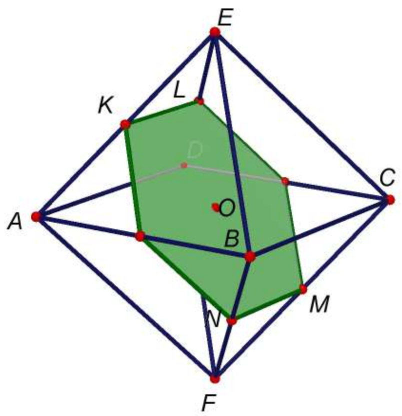
$\overset{\Delta}{AOE}$ és un triangle rectangle i isòsceles.

$\overline{OK} = \overline{AK} = \frac{1}{2}a$.

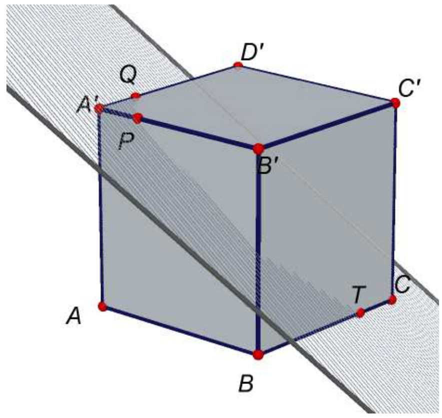
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{OKL}$ és equilàter.
L'àrea del paral·lelogram KLMN (rectangle) és igual a l'àrea de 4 triangles equilàters de costat $\frac{1}{2}a$:

$$S_{KLMN} = 4S_{OKL} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Nota: La secció que determina K, L, M és un hexàgon regular de costat $\frac{1}{2}a$.



L'àrea és $S = 6S_{OKL} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$.



1310.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta a.

Siguen P, Q, T de les arestes $\overline{A'B'}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{BC}$, respectivament, tal que,

$\overline{A'P} = \overline{A'Q} = \overline{CT} = \frac{1}{4}a$.

Determineu l’àrea de la secció que formen en el cub el plànol que passa pels punts P, Q, T.

Solució:

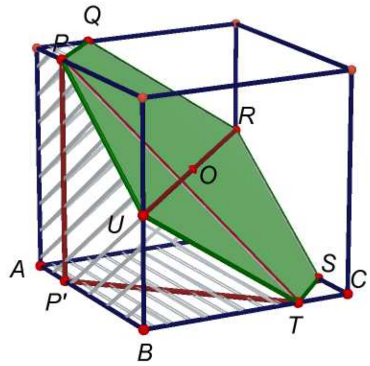
La secció talla l’aresta $\overline{CD}$ en el punt S tal que $\overline{PQ}$ i $\overline{TS}$ són iguals i paral·lels.

Siga O el centre del cub, punt mig de la diagonal $\overline{AC'}$.

El punt Q és simètric del punt T respecte del centre O.

O pertany a la secció.

$\overline{OP} = \overline{OQ}$, aleshores, $\overline{PQ}$ i $\overline{PT}$ són perpendiculars.



La recta que passa pel punt O i és paral·lela a $\overline{PQ}$ pertany a la secció.

Aquesta recta talla les arestes $\overline{BB'}$, $\overline{DD'}$ en els punts U, R, respectivament.

$\overline{BU} = \overline{DR} = \frac{1}{2}a$.

La secció és l’hexàgon PQRSTU

Siga P’ la projecció de P sobre l’aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $P'\overset{\Delta}{B}T$: $\overline{P'T} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $P\overset{\Delta}{P'}T$: $\overline{PT} = \frac{\sqrt{34}}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $A'\overset{\Delta}{P}Q$: $\overline{PQ} = \overline{TS} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $A\overset{\Delta}{B}C$: $\overline{AC} = \overline{UR} = a\sqrt{2}$.

L’àrea de l’hexàgon PQRSTU és igual a al’àrea de dos trapezis URQP:

$$S_{PQRSTU} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{UR}}{2} \cdot \overline{PT} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a + a\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{34}}{4}a = \frac{5\sqrt{17}}{16}a^2.$$