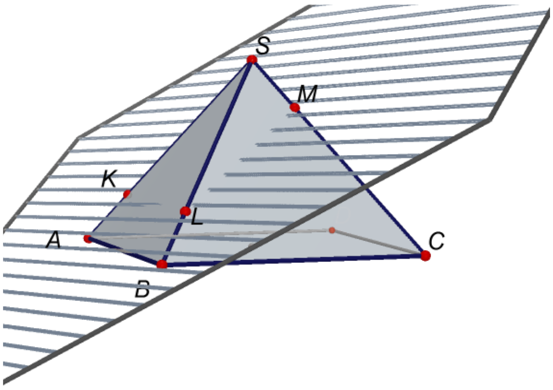
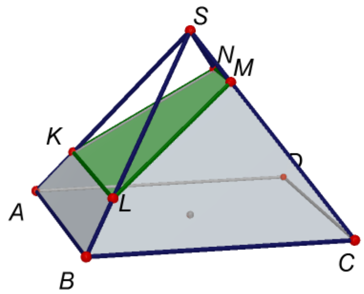
Problemes de Geometria per a l'ESO 132

1311.- Siga la piràmide regular ABCDS que té totes arestes igual a a.
Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,
$\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{SM}=\frac{1}{4}a$.
Determineu l'àrea de la secció que formen en la piràmide el plànol que passa pels punts K, L, M.

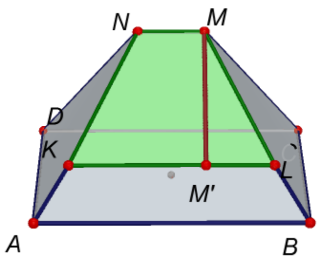


Solució.
Tracem la paral·lela a l'aresta $\overline{AB}$ que passa pel punt M. Aquesta recta talla l'aresta $\overline{DS}$ en el punt N.
La secció que determina el plànol en la piràmide és el trapezi KLMN.



Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KL}=\frac{3}{4}a$.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{CDS}$, $\overset{\Delta}{MNS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{MN}=\frac{1}{4}a$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2=\frac{1}{16}a^2+\frac{9}{16}a^2-2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a\cdot\cos 60^{\circ}.$$

$$\overline{LM}^2=\frac{7}{16}a^2.$$

Siga M' la projecció de M sobre el segment $\overline{KL}$.

$$\overline{LM'}=\frac{\overline{LM}-\overline{MN}}{2}=\frac{1}{4}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MM'L}$:

$$\overline{MM'}=\frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

L'àrea del trapezi KLMN és:

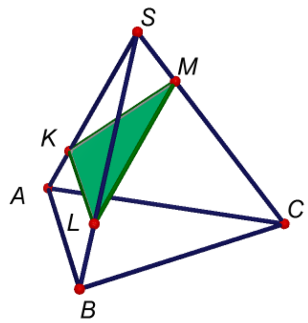
$$S_{KLMN}=\frac{\overline{KL}+\overline{MN}}{2}\overline{MM'}=\frac{\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}a}{2}\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{8}a^2.$$

1312.- Siga el tetraedre regular ABCS.

Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,

$\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{CM} = \frac{1}{4}a$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.

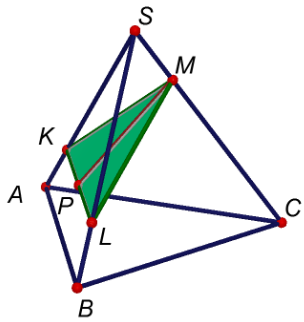


Solució:

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{KL} = \frac{3}{4}a$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 - 2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a \cdot \cos 60^\circ.$$

$$\overline{LM}^2 = \frac{7}{16}a^2.$$

$$\overline{LM} = \overline{KM} = \frac{\sqrt{7}}{4}a.$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{KL}$.

$$\overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{KL} = \frac{3}{8}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLM}$:

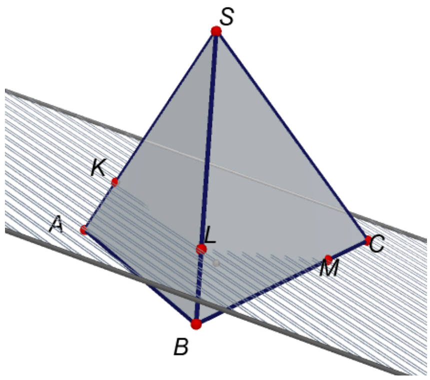
$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{19}}{8}a.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\overline{KL} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}a\frac{\sqrt{19}}{8}a = \frac{3\sqrt{19}}{64}a^2.$$

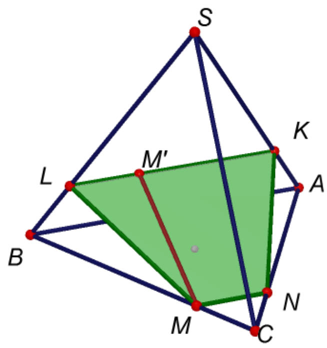
1313.- Siga el tetraedre regular ABCS.
Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{BC}$, respectivament, tal que,
$\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{CM}=\frac{1}{4}a$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.



Solució:
Tracem la paral·lela a l'aresta $\overline{AB}$ que passa pel punt M. Aquesta recta talla l'aresta $\overline{AC}$ en el punt N.
La secció que determina el plànol en el tetraedre és el trapezi KLMN.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{KL}=\frac{3}{4}a$.



Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{NMC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{MN}=\frac{1}{4}a$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2=\frac{1}{16}a^2+\frac{9}{16}a^2-2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a\cdot\cos 60^{o}.$$

$$\overline{LM}^2=\frac{7}{16}a^2.$$

Siga M' la projecció de M sobre el segment $\overline{KL}$.

$$\overline{LM'}=\frac{\overline{LK}-\overline{MN}}{2}=\frac{1}{4}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MM'L}$:

$$\overline{MM'}=\frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

L'àrea del trapezi KLMN és:

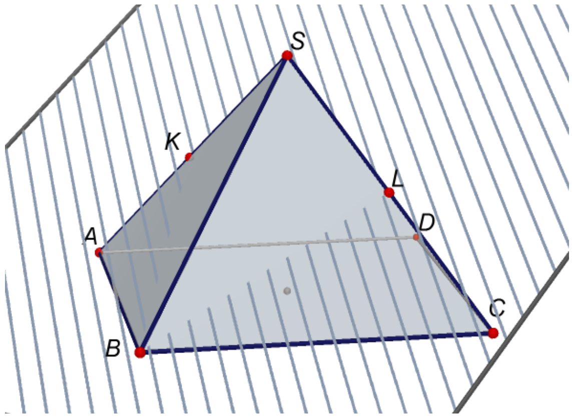
$$S_{KLMN}=\frac{\overline{KL}+\overline{MN}}{2}\overline{MM'}=\frac{\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}a}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$

1314.- Siga la piràmide regular ABCDS que té totes arestes igual a a.

Siguen K, L, de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,

$\overline{AK} = \overline{CL} = \frac{1}{2}a$.

Determineu l'àrea de la secció que formen en la piràmide el plànol que passa pels punts B, K, L.



Solució:

Siga O el centre del quadrat base ABCD.

El plànol talla la recta OS en el punt P.

P és el punt mig del segment $\overline{KL}$.

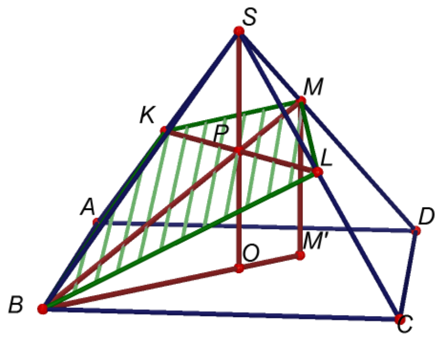
La recta BP talla l'aresta $\overline{AS}$ en el punt M.

La secció és el cometa KBLM.

Siga M' la projecció de M sobre la base ABCD.

Siga $x = \overline{MM'}$.

Notem que $\angle BSD = \angle ASC = 90º$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{OS} = \overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

$$\overline{DM'} = \overline{MM'} = x.$$

$$\overline{BM'} = a\sqrt{2} - x.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{POB}$, $\overset{\Delta}{MM'B}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a\sqrt{2} - x} = \frac{1}{2}$. Resolent l'equació. $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MM'B}$:

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{10}}{3}a.$$

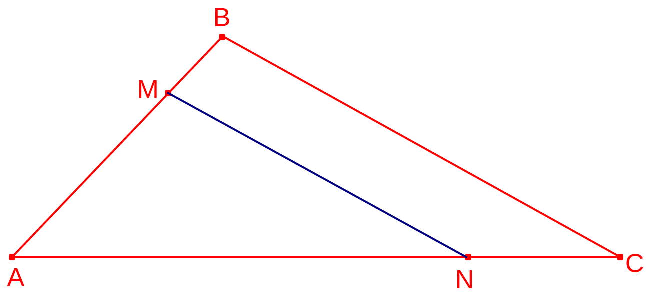
L'àrea del cometa KBLM és:

$$S_{KBLM} = \frac{1}{2}\overline{KL} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{3}a = \frac{\sqrt{5}}{6}a^2.$$

1315.- Els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesuren $\overline{BC} = 6$, $\overline{CA} = 8$, $\overline{AB} = 4$, respectivament.
Per un punt M del costat $\overline{AB}$ es traça la paral·lela $\overline{MN}$ al costat $\overline{BC}$.

Calculeu la longitud del segment $\overline{AB}$, a fi que el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MAN}$ siga igual al perímetre del trapezi BMNC.

Solució:
Siga $x = \overline{AM}$, $y = \overline{MN}$.



Els triangles $\overset{\Delta}{MAN}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{AN}}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2$. Aleshores:
$\overline{AN} = 2x$.
$\overline{BM} = 4 - x$, $\overline{CN} = 8 - 2x$.

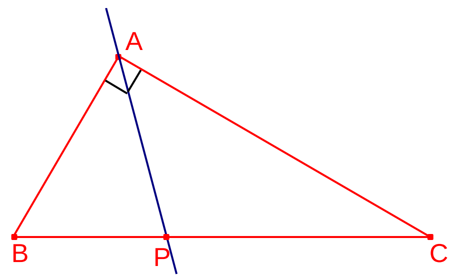
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MAN}$ és:
$P_{AMN} = x + 2x + y$.
El perímetre del polígon BMNC és:
$P_{BMNC} = 6 + 4 - x + 8 - 2x + y$.

Si el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MAN}$ és igual al perímetre del trapezi BMNC, aleshores:
$3x + y = 18 - 3x + y$. Simplificant:
$6x = 18$. Resolent l'equació:
$x = 3$.

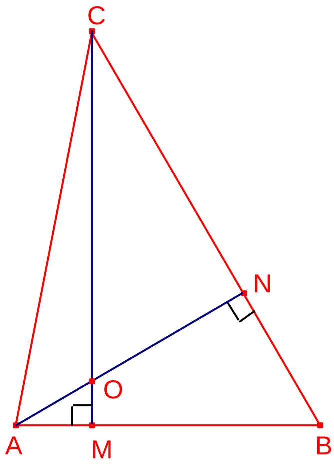
1316.- En un triangle rectangle, la bisectriu de l'angle recte divideix la hipotenusa en dos segments les longituds dels quals són $\sqrt{3}$ i 1, respectivament.
Calculeu la mesura del menor dels angles del triangle.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
Siga AP la bisectriu tal que $\overline{BP} = 1$, $\overline{CP} = \sqrt{3}$.
L'angle menor és C.
Aplicant la propietat de la bisectriu:
$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{3}}{b}$.
$tgC = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, aleshores, $C = 30^o$.



1317.- En la figura, O és l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{BN}=2$, $\overline{BM}=3$, $\overline{AB}+\overline{BC}=10$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{OC}$.



Solució:
Siga $x=\overline{AM}$.
$\overline{AB}+\overline{BC}=10$, aleshores, $\overline{CN}=5-x$.
$\overline{BC}=7-x$, $\overline{AB}=3+x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANB}$, $\overset{\Delta}{CMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{3}{7-x}=\frac{2}{3+x}$. Resolent l'equació:
$x=1$.
$\overline{BC}=6$, $\overline{AB}=4$.

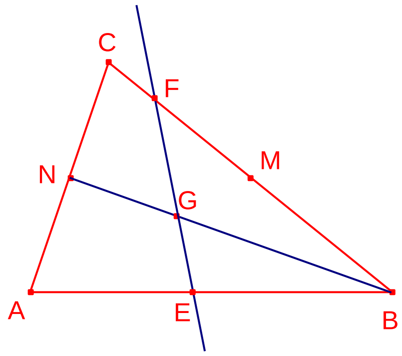
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$:
$\overline{CM}=\sqrt{6^2-3^3}=3\sqrt{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CNO}$, $\overset{\Delta}{CMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{4}{\overline{OC}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}$. Resolent l'equació:

$\overline{OC}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

1318.- Pel baricentre G d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és traça una recta que talla a $\overline{AB}$ en E i a $\overline{BC}$ en F.

Calculeu la mesura del segment $\overline{FC}$ si $\overline{AE} = m$, $\overline{EF} = n$ i $\overline{BF} = p$.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga $x = \overline{CF}$.

$\overline{BC} = p + x$.

$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{p+x}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre G:

$\frac{\overline{GM}}{\overline{AG}} = \frac{1}{2}$.

$\overline{MF} = \overline{BF} - \overline{CM} = p - \frac{p+x}{2} = \frac{p-x}{2}$.

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ i la recta EF:

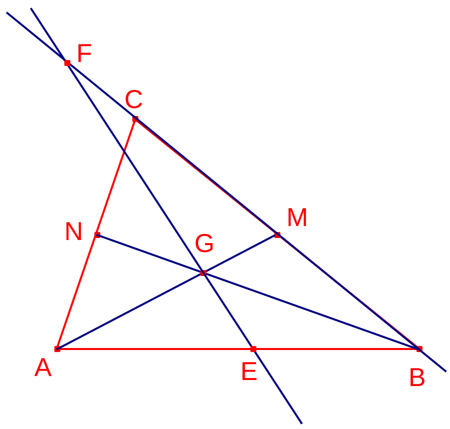
$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{MG}}{\overline{AG}} = 1$.

$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{\frac{p-x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 1$. Resolent l'equació:

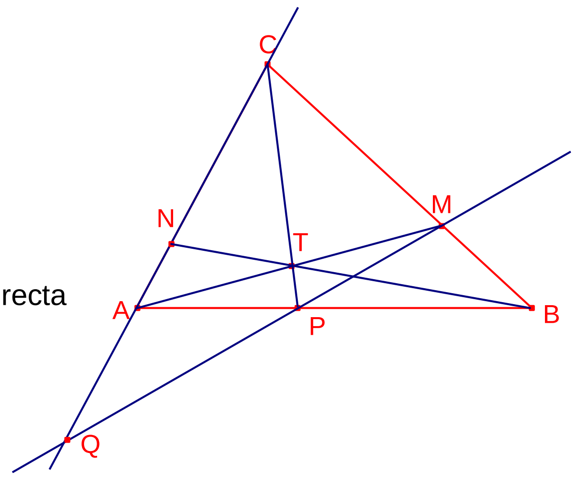
$x = \frac{p(m-n)}{n}$.

Nota si la recta EF talla les rectes AB, BC, el resultat és:

$x = \frac{p|m-n|}{n}$.



1319.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és tracen tres cevianes concurrents $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ i $\overline{CP}$. La prolongació de $\overline{PM}$ interfecta la prolongació del costat $\overline{AC}$ en el punt Q.
Calculeu la mesura del segment $\overline{CQ}$ si $\overline{AN} = m$, $\overline{NC} = n$.



Solució:
Siga T la intersecció de les tres cevianes.
Siga $x = \overline{CQ}$.

Aplicant el teorema de Ceva al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = 1 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i la recta QM:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = 1.$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{x}{x-(m+n)} = 1 \qquad (2)$$

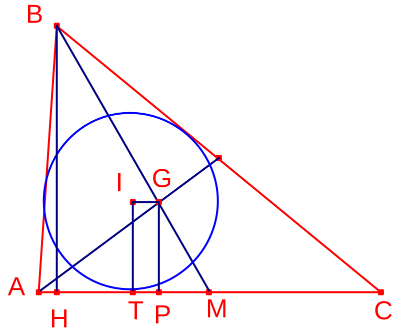
Igualant les expressions (1) (2):

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{x}{x-(m+n)}.$$ Simplificant:

$$\frac{n}{m} = \frac{x}{x-(m+n)}$$

$$x = \frac{n(m+n)}{|n-m|}.$$

1320.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AB}+\overline{BC}=18$ i el segment que uneix l'incentre amb el baricentre és paral·lel al costat $\overline{AC}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AC}$.



Solució:

Siga I i G l'incentre i el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, respectivament.
Siga l'altura $\overline{BH}$.
Siga T la projecció de I sobre el costat $\overline{AC}$.
Siga P la projecció de G sobre el costat $\overline{AC}$.
$\overline{GP}=\overline{IT}=r$, r radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BHM}$, $\overset{\Delta}{GPM}$ són semblants i de raó 3:1.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BH}=3r$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)r.$$

$\overline{AC}\cdot 3r=(18+\overline{AC})r$. Simplificant:

$3\overline{AC}=18+\overline{AC}$. Resolent l'equació:

$\overline{AC}=9$.