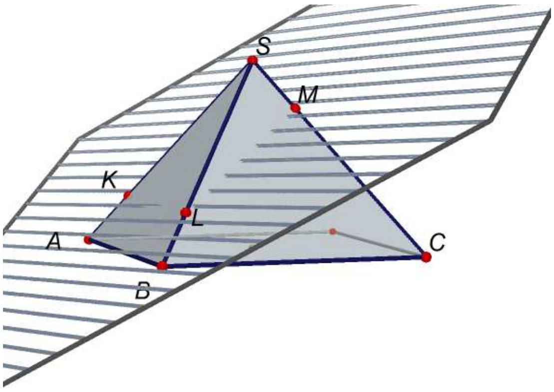
Problemes de Geometria per a l'ESO 132

1311.- Siga la piràmide regular ABCDS que té totes arestes igual a a.

Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,

$\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{SM} = \frac{1}{4}a$.

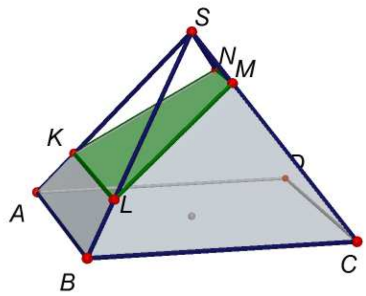
Determineu l'àrea de la secció que formen en la piràmide el plànol que passa pels punts K, L, M.



Solució.

Tracem la paral·lela a l'aresta $\overline{AB}$ que passa pel punt M. Aquesta recta talla l'aresta $\overline{DS}$ en el punt N.

La secció que determina el plànol en la piràmide és el trapezi KLMN.



Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.

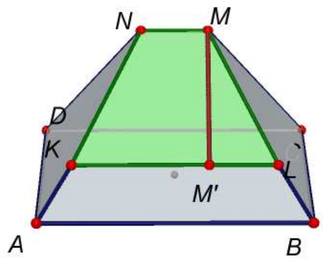
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{KL} = \frac{3}{4}a$.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{CDS}$, $\overset{\Delta}{MNS}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{MN} = \frac{1}{4}a$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 - 2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a\cdot\cos 60^\circ.$$

$$\overline{LM}^2 = \frac{7}{16}a^2.$$

Siga M' la projecció de M sobre el segment $\overline{KL}$.

$$\overline{LM'} = \frac{\overline{LM}-\overline{MN}}{2} = \frac{1}{4}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MM'L}$:

$$\overline{MM'} = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

L'àrea del trapezi KLMN és:

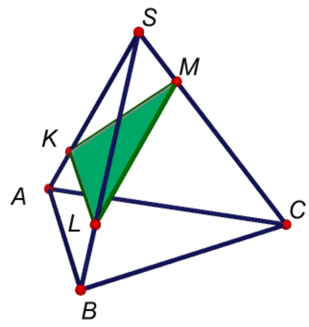
$$S_{KLMN} = \frac{\overline{KL}+\overline{MN}}{2}\overline{MM'} = \frac{\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}a}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$

1312.- Siga el tetraedre regular ABCS.

Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,

$$\overline{AK}=\overline{BL}=\overline{CM}=\frac{1}{4}a.$$

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.

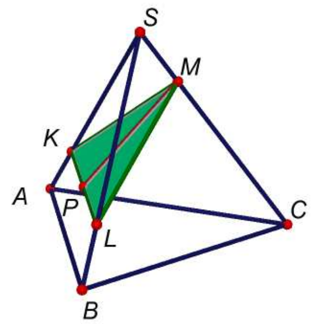


Solució:

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{KL}=\frac{3}{4}a.$$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2=\frac{1}{16}a^2+\frac{9}{16}a^2-2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a\cdot\cos 60^{\circ}.$$

$$\overline{LM}^2=\frac{7}{16}a^2.$$

$$\overline{LM}=\overline{KM}=\frac{\sqrt{7}}{4}a.$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{KL}$.

$$\overline{PL}=\frac{1}{2}\overline{KL}=\frac{3}{8}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLM}$:

$$\overline{PM}=\frac{\sqrt{19}}{8}a.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

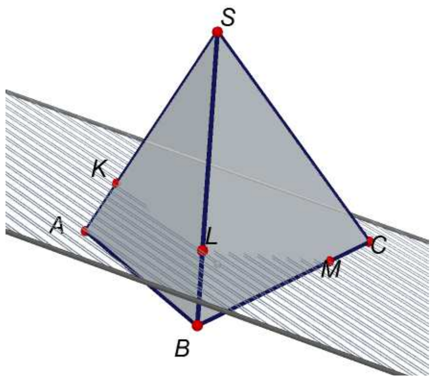
$$S_{KLM}=\frac{1}{2}\overline{KL}\cdot\overline{PM}=\frac{1}{2}\frac{3}{4}a\frac{\sqrt{19}}{8}a=\frac{3\sqrt{19}}{64}a^2.$$

1313.- Siga el tetraedre regular ABCS.

Siguen K, L, M de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{BC}$, respectivament, tal que,

$\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{CM} = \frac{1}{4}a$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.



Solució:

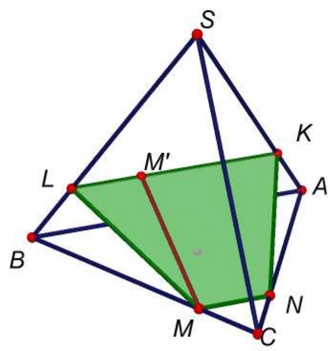
Tracem la paral·lela a l'aresta $\overline{AB}$ que passa pel punt M. Aquesta recta talla l'aresta $\overline{AC}$ en el punt N.

La secció que determina el plànol en el tetraedre és el trapezi KLMN.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{KL} = \frac{3}{4}a$.



Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{NMC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{MN} = \frac{1}{4}a$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LMS}$:

$$\overline{LM}^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 - 2\frac{1}{4}a\frac{3}{4}a \cdot \cos 60^{o}.$$

$$\overline{LM}^2 = \frac{7}{16}a^2.$$

Siga M' la projecció de M sobre el segment $\overline{KL}$.

$$\overline{LM'} = \frac{\overline{LK} - \overline{MN}}{2} = \frac{1}{4}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MM'L}$:

$$\overline{MM'} = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

L'àrea del trapezi KLMN és:

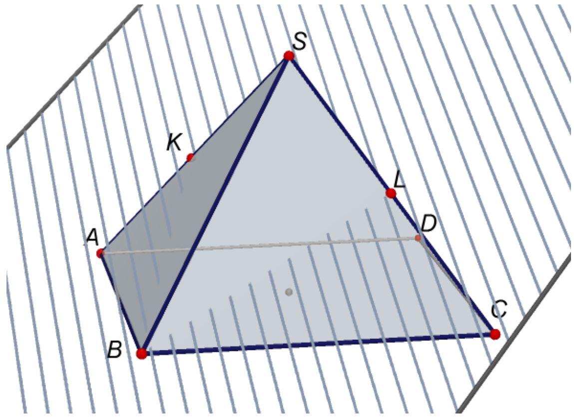
$$S_{KLMN} = \frac{\overline{KL} + \overline{MN}}{2}\overline{MM'} = \frac{\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}a}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$

1314.- Siga la piràmide regular ABCDS que té totes arestes igual a a.

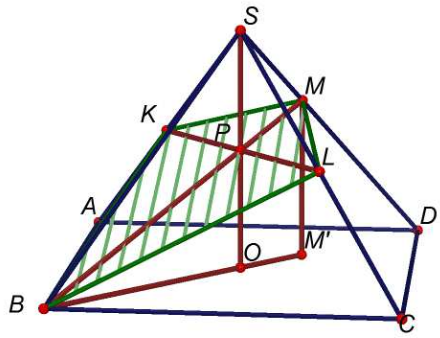
Siguen K, L, de les arestes $\overline{AS}$, $\overline{CS}$, respectivament, tal que,

$\overline{AK}=\overline{CL}=\frac{1}{2}a$.

Determineu l'àrea de la secció que formen en la piràmide el plànol que passa pels punts B, K, L.



Solució:
Siga O el centre del quadrat base ABCD.
El plànol talla la recta OS en el punt P.
P és el punt mig del segment $\overline{KL}$.
La recta BP talla l'aresta $\overline{AS}$ en el punt M.
La secció és el cometa KBLM.
Siga M' la projecció de M sobre la base ABCD.
Siga $x=\overline{MM'}$.
Notem que $\angle BSD=\angle ASC=90^{\circ}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:



$$\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{OS}=\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OS}=\frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

$$\overline{DM'}=\overline{MM'}=x.$$

$$\overline{BM'}=a\sqrt{2}-x.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{POB}$, $\overset{\Delta}{MM'B}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a\sqrt{2}-x}=\frac{1}{2}$. Resolent l'equació. $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MM'B}$:

$$\overline{BM}=\frac{\sqrt{10}}{3}a.$$

L'àrea del cometa KBLM és:

$$S_{KBLM}=\frac{1}{2}\overline{KL}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{3}a=\frac{\sqrt{5}}{6}a^{2}.$$

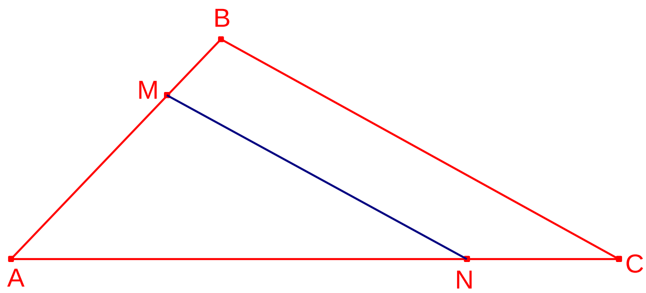
1315.- Els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesuren $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$, $\overline{AB}=4$, respectivament.

Per un punt M del costat $\overline{AB}$ es traça la paral·lela $\overline{MN}$ al costat $\overline{BC}$.

Calculeu la longitud del segment $\overline{AB}$, a fi que el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MAN}$ siga igual al perímetre del trapezi BMNC.

Solució:

Siga $x=\overline{AM}$, $y=\overline{MN}$.



Els triangles $\overset{\Delta}{MAN}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AN}}{x}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=2$. Aleshores:

$\overline{AN}=2x$.

$\overline{BM}=4-x$, $\overline{CN}=8-2x$.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MAN}$ és:

$P_{AMN}=x+2x+y$.

El perímetre del polígon BMNC és:

$P_{BMNC}=6+4-x+8-2x+y$.

Si el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{MAN}$ és igual al perímetre del trapezi BMNC, aleshores:

$3x+y=18-3x+y$. Simplificant:

$6x=18$. Resolent l'equació:

$x=3$.

1316.- En un triangle rectangle, la bisectriu de l'angle recte divideix la hipotenusa en dos segments les longituds dels quals són $\sqrt{3}$ i 1, respectivament.

Calculeu la mesura del menor dels angles del triangle.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.

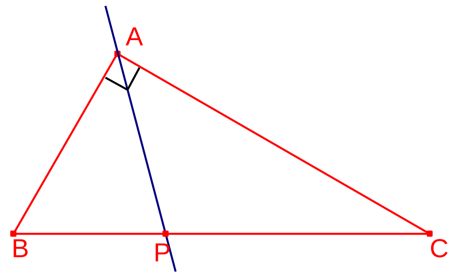
Siga AP la bisectriu tal que $\overline{BP} = 1$, $\overline{CP} = \sqrt{3}$.

L'angle menor és C.

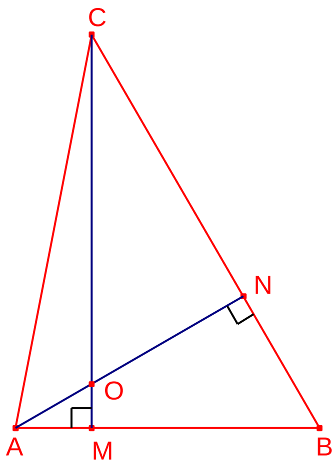
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{1}{c} = \frac{\sqrt{3}}{b}.$$

$$tgC = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$, aleshores, $C = 30º$.



1317.- En la figura, O és l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



$\overline{BN} = 2$, $\overline{BM} = 3$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 10$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{OC}$.

Solució:

Siga $x = \overline{AM}$.

$\overline{AB} + \overline{BC} = 10$, aleshores, $\overline{CN} = 5 - x$.

$\overline{BC} = 7 - x$, $\overline{AB} = 3 + x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANB}$, $\overset{\Delta}{CMB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{3}{7-x} = \frac{2}{3+x}$. Resolent l'equació:

$x = 1$.

$\overline{BC} = 6$, $\overline{AB} = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$:

$\overline{CM} = \sqrt{6^2 - 3^3} = 3\sqrt{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CNO}$, $\overset{\Delta}{CMB}$ són semblants.

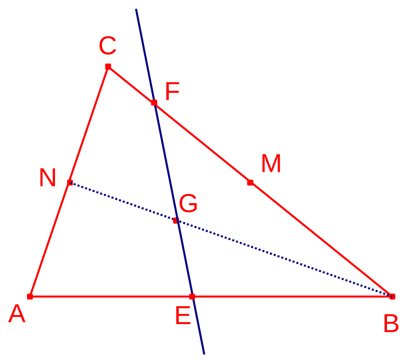
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{4}{\overline{OC}} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$. Resolent l'equació:

$\overline{OC} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

1318.- Pel baricentre G d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és traça una recta que talla a $\overline{AB}$ en E i a $\overline{BC}$ en F.

Calculeu la mesura del segment $\overline{FC}$ si $\overline{AE}=m$, $\overline{EF}=n$ i $\overline{BF}=p$.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga $x=\overline{CF}$.

$\overline{BC}=p+x$.

$\overline{BM}=\overline{CM}=\dfrac{p+x}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre G:

$\dfrac{\overline{GM}}{\overline{AG}}=\dfrac{1}{2}$.

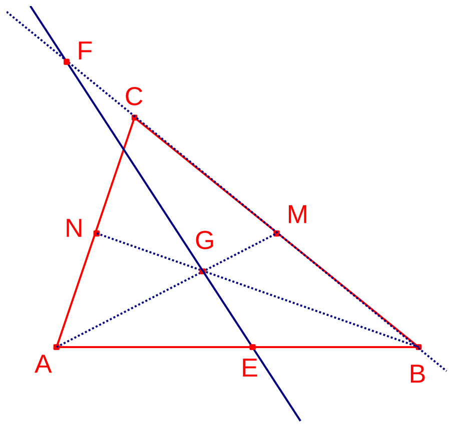
$\overline{MF}=\overline{BF}-\overline{CM}=p-\dfrac{p+x}{2}=\dfrac{p-x}{2}$.

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ i la recta EF:

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}\cdot\dfrac{\overline{BF}}{\overline{MF}}\cdot\dfrac{\overline{MG}}{\overline{AG}}=1$.

$\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{p}{\frac{p-x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$. Resolent l'equació:

$x=\dfrac{p(m-n)}{n}$.

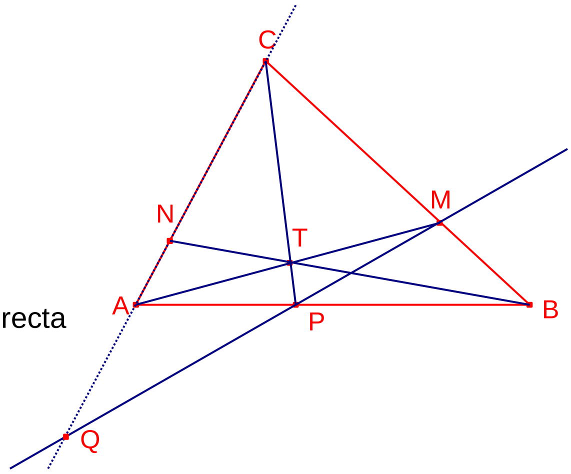


Nota si la recta EF talla les rectes AB, BC, el resultat és:

$x=\dfrac{p|m-n|}{n}$.

1319.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és tracen tres cevianes concurrents $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ i $\overline{CP}$. La prolongació de $\overline{PM}$ interfecta la prolongació del costat $\overline{AC}$ en el punt Q.

Calculeu la mesura del segment $\overline{CQ}$ si $\overline{AN} = m$, $\overline{NC} = n$.



Solució:
Siga T la intersecció de les tres cevianes.
Siga $x = \overline{CQ}$.

Aplicant el teorema de Ceva al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = 1 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i la recta QM:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{AQ}} = 1.$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{x}{x-(m+n)} = 1 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

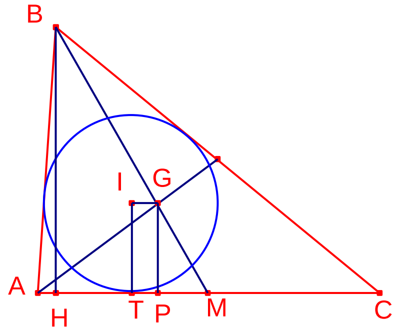
$$\frac{n}{m} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{x}{x-(m+n)}.$$ Simplificant:

$$\frac{n}{m} = \frac{x}{x-(m+n)}$$

$$x = \frac{n(m+n)}{|n-m|}.$$

1320.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AB}+\overline{BC}=18$ i el segment que uneix l'incentre amb el baricentre és paral·lel al costat $\overline{AC}$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{AC}$.



Solució:

Siga I i G l'incentre i el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, respectivament.

Siga l'altura $\overline{BH}$.

Siga T la projecció de I sobre el costat $\overline{AC}$.

Siga P la projecció de G sobre el costat $\overline{AC}$.

$\overline{GP}=\overline{IT}=r$, r radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BHM}$, $\overset{\Delta}{GPM}$ són semblants i de raó 3:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BH}=3r$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)r.$$

$\overline{AC}\cdot 3r=(18+\overline{AC})r$. Simplificant:

$3\overline{AC}=18+\overline{AC}$. Resolent l'equació:

$\overline{AC}=9$.