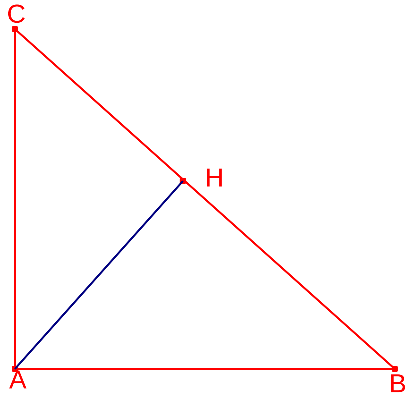
# Problemes de Geometria per a l'ESO 133

1321.- En un triangle rectangle, les projeccions dels dos catets sobre la hipotenusa estan en relació de 4 a 5.
Calculeu la proporció entre el catets.




Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
Siga H la projecció del vèrtex A sobre la hipotenusa.
Siga $\overline{CH} = 4x$, $\overline{BH} = 5x$.

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AH}^2 = 4x \cdot 5x = 20x^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$:

$\overline{AC}^2 = (4x)^2 + 20x^2 = 36x^2$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHB}$:

$\overline{AB}^2 = (5x)^2 + 20x^2 = 45x^2$ (2)

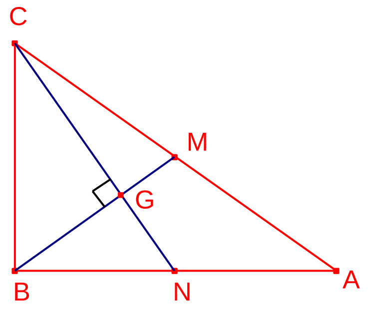
Dividint les expressions (1) (2):

$\left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \dfrac{36x^2}{45x^2} = \dfrac{4}{5}$. Calculant l'arrel quadrada:

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

1322.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^{\text{o}}$ tal que les seues mitjanes $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ són perpendiculars.

Si $\overline{BC} = 6$ calculeu la mesura del catet $\overline{AB}$.



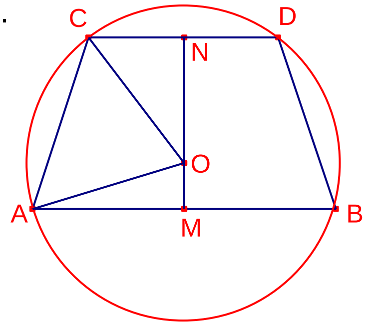

Solució:
Siga $x = \overline{AN} = \overline{BN}$.
La mitjana del triangle rectange referida a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.
Aleshores $\angle MBA = \angle MAB$.
Aleshores, $\angle BCN = \angle BAC$.

Per tant, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CBN}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{6}{2x} = \frac{x}{6}$. Resolent l'equació:
$x = 3\sqrt{2}$.
$\overline{AB} = 2x = 6\sqrt{2}$.

1323.- $\overline{AB} = 48$ i $\overline{CD} = 30$ són dues cordes paral·leles d'una circumferència de radi r.

La distància entre les cordes és igual a 27.
Calculeu el radi de la circumferència.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
Siguen M, N els punts migs de les cordes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.
Per ser $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ cordes, la recta MN passa pel centre de la circumferència.




$\overline{MN} = 27$, $\overline{CN} = 15$, $\overline{AM} = 24$.
Siga $x = \overline{OM}$.
$\overline{ON} = 27 - x$.
$\overline{OA} = \overline{OC} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{CNO}$:
$(27-x)^2 + 15^2 = r^2$.

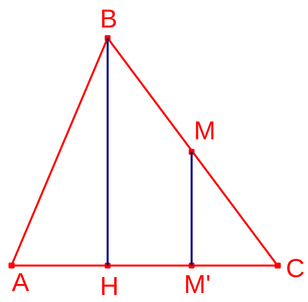
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$x^2 + 24^2 = r^2$.

Resolent els sistema format per les dues equacions $\begin{cases}(27-x)^2 + 15^2 = r^2 \\ x^2 + 24^2 = r^2\end{cases}$:

$\begin{cases} r = 25 \\ x = 7 \end{cases}$.

1324.- Els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesuren $\overline{AB}=13$, $\overline{AC}=14$, $\overline{BC}=15$.

Calculeu la distància del punt mig del costat $\overline{BC}$ al costat $\overline{AC}$.




Solució:
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siga H la projecció de B sobre el costat $\overline{AC}$.
Siga M' la projecció de M sobre $\overline{AC}$.
La distància de M al costat $\overline{AC}$ és igual a
la mesura del segment $\overline{MM'}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}=\frac{b\cdot\overline{BH}}{2}.$$

$\frac{\sqrt{42\cdot16\cdot14\cdot12}}{4}=\frac{14\cdot\overline{BH}}{2}$. Resolent l'equació:

$\overline{BH}=12$.

$\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{BC}$.

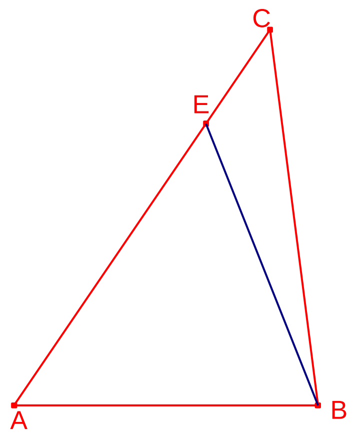
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BHC}$, $\overset{\Delta}{MM'C}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{MM'}=\frac{1}{2}\overline{BH}=6$.

1325.- Els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesuren $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=12$, $\overline{BC}=10$.

Pel vèrtex B es traça una ceviana $\overline{BE}$ que divideix el costat $\overline{AC}$ en dos segments $\overline{AE}=9$, $\overline{EC}=3$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BE}$.

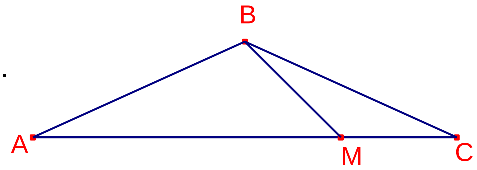
Solució:




Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$8^2=10^2+12^2-2\cdot 10\cdot 12\cdot \cos C$. Simplificant:
$\cos C=\frac{3}{4}$.

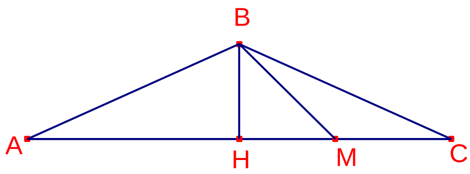
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:
$\overline{BE}^2=10^2+3^2-2\cdot 10\cdot 3\cdot \cos C$
$\overline{BE}^2=10^2+3^2-2\cdot 10\cdot 3\cdot \frac{3}{4}$. Simplificant:
$\overline{BE}^2=64$.
$\overline{BE}=8$.

1326.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=\overline{BC}$.




Siga M del costat $\overline{AC}$ tal que, $\overline{AM}=m$, $\overline{CM}=n$, $\angle AMB=45^{\circ}$.
Calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$.

Solució:




Siga $\overline{BH}=h$ altura del triangle (H és el punt mig del costat $\overline{AB}$.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHM}$ és isòsceles, aleshores,

$\overline{HM}=h$

$\overline{AB}=m+n$.

$\overline{HC}=\frac{m+n}{2}$.

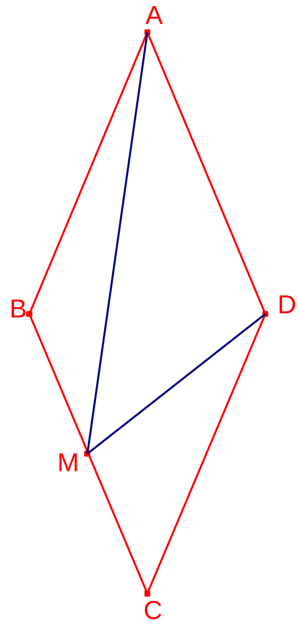
$\overline{HM}=\overline{HC}-n=\frac{m+n}{2}-n=\frac{m-n}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHC}$:

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{\overline{BH}^2+\overline{HC}^2}=\sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2+\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}.$$

1327.- Sobre el costat $\overline{BC}$ d'un rombe ABCD es troba el punt mig M tal que $\overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 = 40$.

Calculeu el perímetre del rombe.




Solució:
Siga el rombe ABCD tal que $A = \alpha$.
$B = 180^{o} - \alpha$.
Siga $c = \overline{AB}$ costat del rombe.
$\overline{CM} = \overline{BM} = \frac{1}{2}c$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MCD}$:

$$\overline{MD}^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - 2c\frac{1}{2}c \cdot \cos\alpha .$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MAB}$:

$$\overline{AM}^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - 2c\frac{1}{2}c \cdot \cos(180^{o} - \alpha) = c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + 2c\frac{1}{2}c \cdot \cos\alpha .$$

Sumant ambdues expressions:

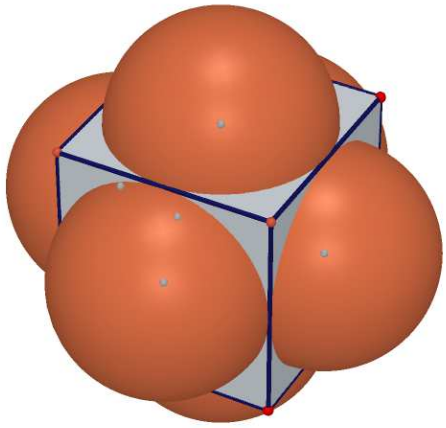
$$\overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 = 2c^2 + 2\left(\frac{1}{2}c\right)^2 = 40 .$$

$$\frac{5}{2}c^2 = 40 .$$

Resolent l'equació:
$c = 4$.
El perímetre del rombe és:
$P = 4c = 16$.

1328.- Sobre totes les cares d'un cub d'aresta a s'han construït cap a l'exterior sis semiesferes amb centre el centre de cada cara i tangents a les arestes que formen la cara.

Calculeu l'àrea i el volum del cos resultant.



Solució:

El volum del cos és igual al volum del cub més el volum de tres esferes de radi $\frac{a}{2}$.

$$V_{cos} = a^3 + 3\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\right) = \left(1+\frac{\pi}{2}\right)a^3.$$

L'àrea del cos és igual a l'àrea de 3 esferes de radi $\frac{a}{2}$ més l'àrea de sis quadrats de costat a, menys sis cercles de radi $\frac{a}{2}$.

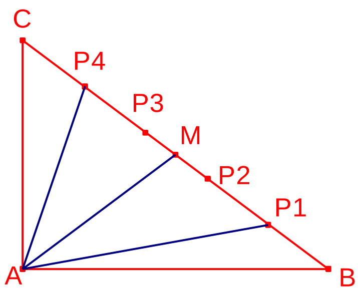
$$S_{cos} = 3\left(4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + 6\left(a^2\right) - 6\left(\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \left(6+\frac{3}{2}\pi\right)a^2.$$

1329.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$, els punts $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ divideixen la hipotenusa en cinc parts iguals.

Si $\overline{AP_1}^2 = 265$ i $\overline{AP_4}^2 = 160$, calculeu la mesura de la hipotenusa.

Solució:

Siga $a = \overline{BC}$, hipotenusa del triangle.




$\overline{BP_1} = \frac{a}{5}$, $\overline{CP_4} = \frac{a}{5}$.

$\overline{P_1P_4} = \frac{3}{5}a$.

Siga M el punt mig de la hipotenusa.

La mitjana d'un triangle rectangle mesura la meitat de la hipotenusa

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{a}{2} \qquad (1)$$

M és el punt mig del segment $\overline{P_1P_4}$.

$\overline{AM}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{P_1AP_4}$:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2\overline{AP_1}^2 + 2\overline{AP_4}^2 - \overline{P_1P_4}^2}}{2} \qquad (2)$$

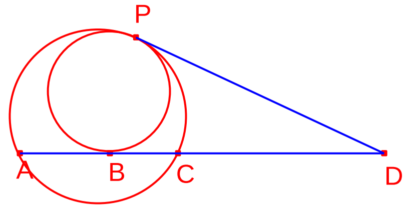
Igualant les expressions (1) (2):

$$\frac{\sqrt{2 \cdot 265 + 2 \cdot 160 + \left(\frac{3}{5}a\right)^2}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Resolent l'equació:

$a = 25$.

1330.- En el dibuix P i B són punts de tangència, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$.
Calculeu $\overline{CD}$.




Solució:
Siga $\overline{CD} = x$.
Per ser P i B punts de tangència de la circumferència menuda:
$\overline{DB} = \overline{DP} = 3 + x$.
$\overline{AD} = x + 7$.
Aplicant la potència de D respecte de la circumferència gran:
$\overline{DC} \cdot \overline{AD} = \overline{DP}^2$.
$x(x+7) = (x+3)^2$. Resolent l'equació:
$x = 9$.