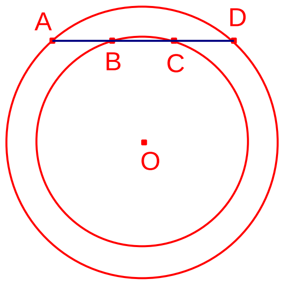
Problemes de Geometria per a l'ESO 134



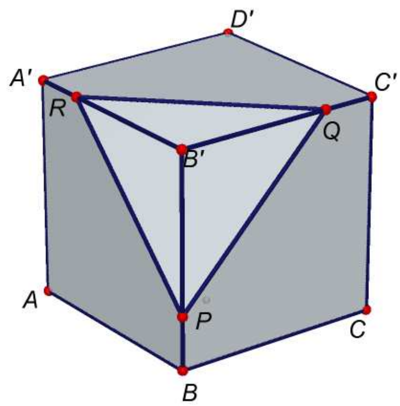
1331.- Siguen dues circumferències concèntriques de radis 7, 9.
La corda $\overline{AD}$ talla la circumferència menuda en els punts B, C tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.
Determineu la mesura del segment $\overline{AD}$.

Solució:
Siga $R = \overline{OA} = 9$, $r = \overline{OB} = 7$
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = x$.
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència menuda:
$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AO}^2 - r^2$.
$x \cdot 2x = 9^2 - 7^2$.
Resolent l'equació:
$x = 4$.
$\overline{AD} = 3x = 12$.

1332.- Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a.

Siguen P, Q, R de les arestes $\overline{BB'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, respectivament, tal que $\overline{BP} = \overline{C'Q} = \overline{A'R} = \frac{1}{4}a$.

Calculeu l'àrea i el volum del sòlid truncat pel plànol que passa pels punts P, Q, R.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PB'R}$:

$\overline{PR} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$.

L'àrea del sòlid truncat és igual a l'àrea del cub menys l'àrea de tres triangles rectangles $\overset{\Delta}{PB'R}$ més l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$:

$$S_{\text{sòlid}} = 6a^2 - 3\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{4}a\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^2 = \left(\frac{165 + 9\sqrt{3}}{32}\right)a^2 .$$

El volum del sòlid truncat és igual al volum de cub menys el volum del tetraedre PQRB':

$$V_{\text{sòlid}} = a^3 - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\overline{B'P}^3 = a^3 - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}a\right)^3 = \frac{119}{128}a^3 .$$

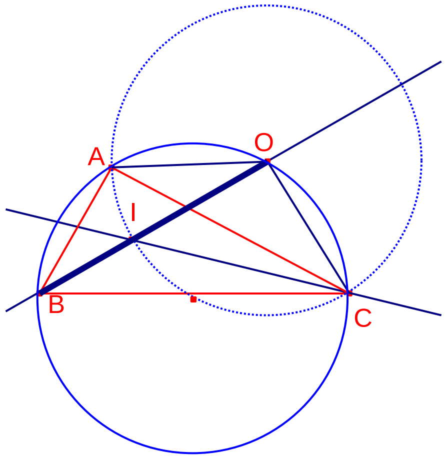
1333.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 60º$ i $\overline{AB} + \overline{BC} = 12$.

Siga I l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga O el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{AIC}$. Calculeu la mesura del segment $\overline{OB}$.

Solució:

$\angle AIC = 90º + \frac{B}{2} = 120º$.



Aleshores, $\overset{\frown}{AIC} = 120º$. Per tant, $\angle AOC = 120º$.
Aleshores, el quadrilàter ABCO és inscriptible.
Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AIC}$.
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscriptible ABCO:

$\overline{AB} \cdot r + \overline{BC} \cdot r = \overline{OB} \cdot \overline{AC}$.

$(\overline{AB} + \overline{BC})r = \overline{OB} \cdot \overline{AC}$.

$12r = \overline{OB} \cdot \overline{AC}$ (1)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AIC}$:

$\frac{\overline{AC}}{\sin 120º} = 2r$.

$\overline{AC} = r\sqrt{3}$ (2)

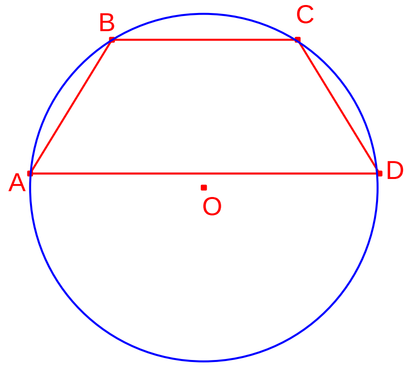
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$12r = \overline{OB} \cdot r\sqrt{3}$. Simplificant:

$\overline{OB} = 4\sqrt{3}$.

1334.- Siga el trapezi isòsceles ABCD amb $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ paral·lels.

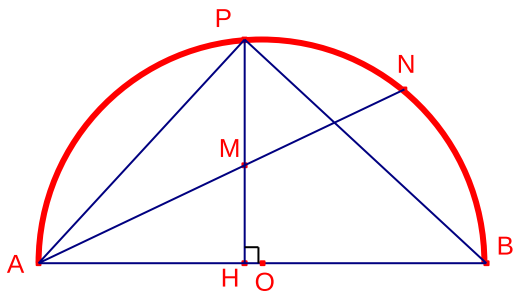
Siga $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = 4\sqrt{5}$.
Calculeu el producte de les bases.



Solució:
Un trapezi isòsceles és un quadrilàter inscriptible.
$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.
$\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$.
$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$.
$\overline{BC} \cdot \overline{AD} = 4\sqrt{5}$.

1335.- En la figura siga $\overline{AP}=8$, $\overline{AM}=6$, $\overline{AB}$ diàmetre.

Calculeu $\overline{MN}$.



Solució:

Siga $\overline{AB}=2r$.

Siga $\overline{AH}=x$.

$\angle APB=90^o$, per ser angle inscrit i abraçar el diàmetre.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triagle rectangle $\overset{\Delta}{AHP}$:

$\overline{PH}=\sqrt{64-x^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triagle rectangle $\overset{\Delta}{AHM}$:

$\overline{MH}=\sqrt{36-x^2}$.

$\overline{PM}=\overline{PH}-\overline{MH}=\sqrt{64-x^2}-\sqrt{36-x^2}$.

Siga P' el simètric de P respecte del diàmetre $\overline{AB}$.

$\overline{PH}=\overline{P'H}$

$\overline{P'M}=\overline{PH}+\overline{MH}=\sqrt{64-x^2}+\sqrt{36-x^2}$.

Aplicant la potència de M respecte de la circumferència:

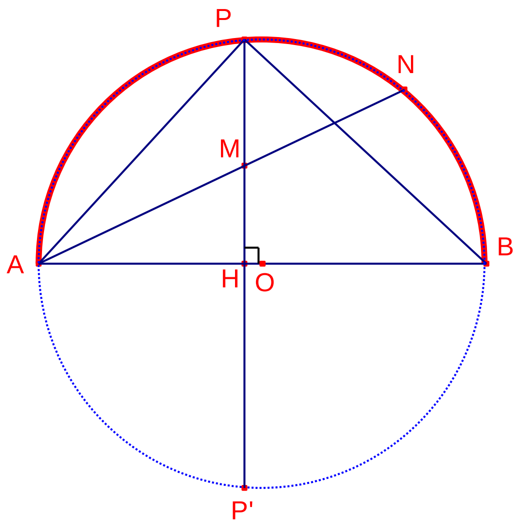
$\overline{AM}\cdot\overline{MN}=\overline{PM}\cdot\overline{P'M}$.

$6\cdot\overline{MN}=\left(\sqrt{64-x^2}-\sqrt{36-x^2}\right)\left(\sqrt{64-x^2}+\sqrt{36-x^2}\right)$.

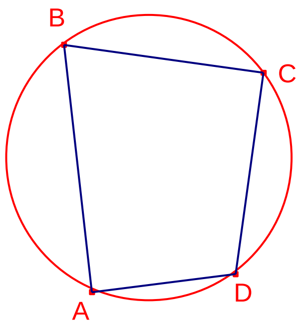
$6\cdot\overline{MN}=\left(64-x^2\right)-\left(36-x^2\right)$.

$6\cdot\overline{MN}=28$.

$\overline{MN}=\dfrac{14}{3}$.

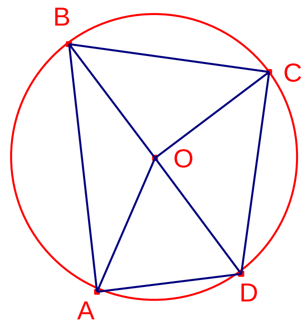


1336.- En una circumferència de radi R hi ha inscrit el quadrilàter ABCD tal que $\overline{AB}$ és el costat d'un triangle equilàter inscrit en la circumferència, $\overline{AD}$ és el costat d'un hexàgon regular inscrit en la circumferència i $\overline{BC}$ és el costat d'un quadrat inscrit en la circumferència.



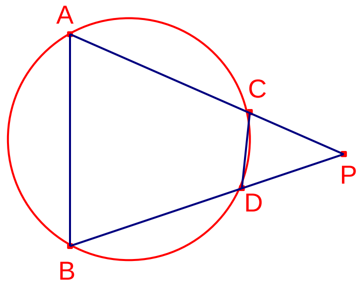
Calculeu la mesura del costat $\overline{CD}$ i els angles del quadrilàter ABCD.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència.



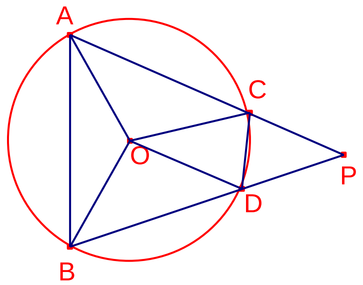
$\angle AOB$ és l'angle central d'un polígon regular de 3 costats:
$\angle AOB = \frac{360º}{3} = 120º$. $\angle OAB = \angle OBA = 30º$.
$\angle AOD$ és l'angle central d'un polígon regular de 6 costats:
$\angle AOD = \frac{360º}{6} = 60º$. $\angle OAD = \angle ODA = 60º$.
$\angle BOC$ és l'angle central d'un polígon regular de 4 costats:
$\angle BOC = \frac{360º}{4} = 90º$. $\angle OBC = \angle OCB = 45º$.
$\angle COD = 306 - (120º + 60º + 90º) = 90º$ (angle central d'un polígon regular de 4 costats)
Aleshores, $\overline{CD}$ és igual al costat d'un quadrat inscrit en una circumferència de radi R.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCD}$:
$\overline{CD} = R\sqrt{2}$.
$\angle OCD = \angle ODC = 45º$.
Els angles del polígon ABCD són:
$A = 30º + 60º = 90º$.
$B = 30º + 45º = 75º$.
$C = 45º + 45º = 90º$.
$D = 45º + 60º = 105º$.

1337.- Siguen A, B, C, D, punts d'una circumferència de tal que $\overline{AB}$ és el costat d'un triangle equilàter inscrit en la circumferència, $\overline{CD}$ és el costat d'un decàgon regular inscrit en la circumferència.



Les rectes AC, BD és tallen en el punt P.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle APB$.

Solució:



$\angle AOB$ és l'angle central d'un polígon regular de 3 costats:

$$\angle AOB = \frac{360^o}{3} = 120^o.$$

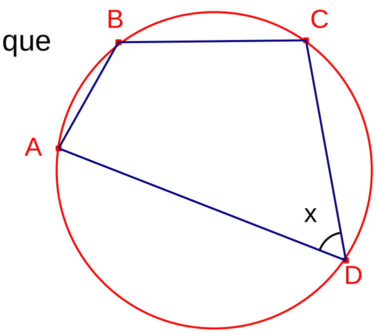
$\angle COD$ és l'angle central d'un polígon regular de 10 costats:

$$\angle COD = \frac{360^o}{10} = 36^o.$$

$\angle APB$ és l'angle exterior d'una circumferència, la seua mesura és igual a la diferència dels arcs que abraça:

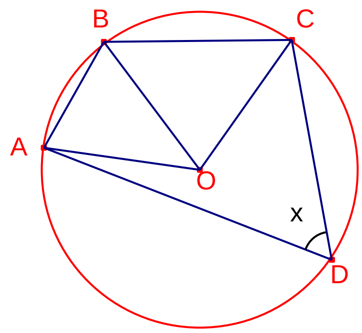
$$\angle APB = \frac{\angle AOB - \angle COD}{2} = \frac{120^o - 36^o}{2} = 42^o.$$

1338.- En una circumferència i ha inscrit el quadrilàter ABCD tal que $\overline{AB}$ és el costat d'un octògon regular inscrit en la circumferència, $\overline{BC}$ és el costat d'un pentàgon regular inscrit en la circumferència.



Calculeu la mesura de l'angle $x = \angle ADC$.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència.



$\angle AOB$ és l'angle central d'un polígon regular de 8 costats:

$\angle AOB = \dfrac{360^{o}}{8} = 45^{o}$. $\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{135^{o}}{2}$.

$\angle AOD$ és l'angle central d'un polígon regular de 5 costats:

$\angle BOC = \dfrac{360^{o}}{5} = 72^{o}$. $\angle OBC = \angle OCB = 54^{o}$.

$\angle ABC = \angle OBA + \angle OBC = \dfrac{135^{o}}{2} + 54^{o} = \dfrac{243^{o}}{2} = 121^{o}30'$.

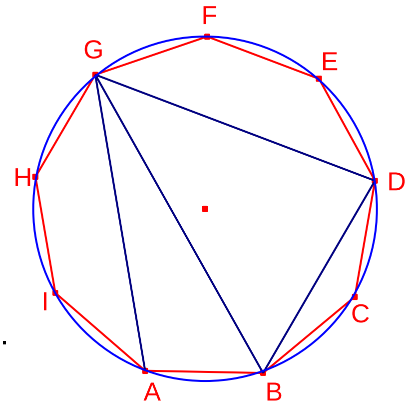
$\angle ABC$, x són angles oposats d'un quadrilàter inscrit en la circumferència, aleshores són suplementaris:

$x = 180^{o} - \angle ABC = 180^{o} - 121^{o}30' = 58^{o}30^{o}$.

1339.- Siga ABCDEFGHI un polígon regular de 9 costats tal que $\overline{AB}+\overline{BD}=14$.

Calculeu la mesura de la diagonal $\overline{BG}$.

Solució 1:
Considerem el quadrilàter ABDG inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular.



$\overline{AG}=\overline{DG}=\overline{AD}$.

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscrit ABDG:

$\overline{AG}\cdot\overline{BD}+\overline{DG}\cdot\overline{AB}=\overline{AD}\cdot\overline{BG}$.

$\overline{AG}\cdot\overline{BD}+\overline{AG}\cdot\overline{AB}=\overline{AG}\cdot\overline{BG}$. Simplificant:

$\overline{BG}=\overline{AB}+\overline{BD}=14$.

Solució 2:
Siga R el radi de la circumferència circumscrita al polígon regular.

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDG}$:

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 40^{\circ}}=2R.$$

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABG}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 20^{\circ}}=2R.$$

$\overline{AB}+\overline{BD}=2(\sin 20^{\circ}+\sin 40^{\circ})R=\left(4\sin 30^{\circ}\cdot\cos 10^{\circ}\right)R=2\cos 10^{\circ}\cdot R$.

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{BDG}$:

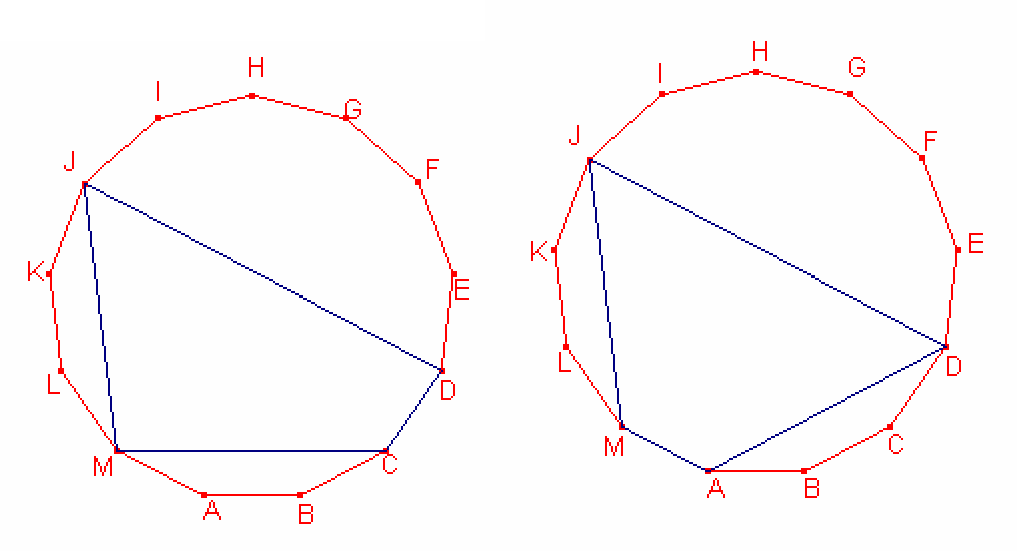
$$\frac{\overline{BG}}{\sin 80^{\circ}}=2R.$$

$\overline{BG}=2R\sin 80^{\circ}=2R\cdot\cos 10^{\circ}=\overline{AB}+\overline{BD}=14$.

1340.- Siga el polígon regular0 de 13 costats ABCDEFGHIJKLM tal que $\overline{AD} = a$, $\overline{AE} = b$.

Calculeu la mesura de la diagonal $\overline{DJ}$.

Solució:



Siga $x = \overline{DJ}$.

Siga $c = \overline{AB}$ costat del polígon regular.

Considerem el quadrilàter ADJM inscriptible en la circcumferència circunscrita al polígon regular.

$\overline{AM} = c$, $\overline{JM} = a$, $\overline{AJ} = \overline{DM} = b$.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

$$cx + a^2 = b^2 \qquad (1)$$

Considerem el quadrilàter CDJM inscriptible en la circcumferència circunscrita al polígon regular.

$\overline{CD} = c$, $\overline{JC} = x$, $\overline{JM} = \overline{CM} = a$, $\overline{DM} = b$.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

$$ac + ax = bx \qquad (2)$$

$$c = \frac{b-a}{a}x \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$\frac{b-a}{a}x^2 + a^2 = b^2$. Resolent l'equació:

$x = \overline{JD} = \sqrt{a(a+b)}$.