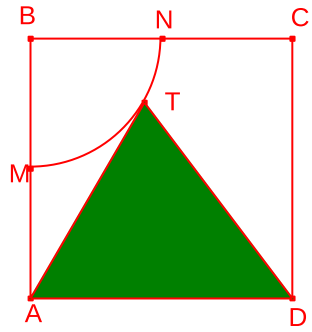
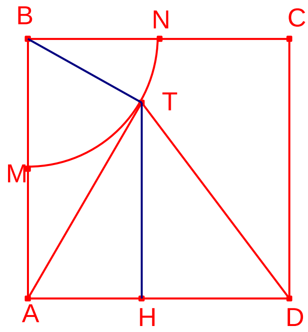
Problemes de Geometria per a l'ESO 135



1341.- En la figura, el costat del quadrat ABCD és 2.
M, N són punts migs dels costats.
T és un punt de tangència del quadrant i la recta que passa per A.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADT}$.



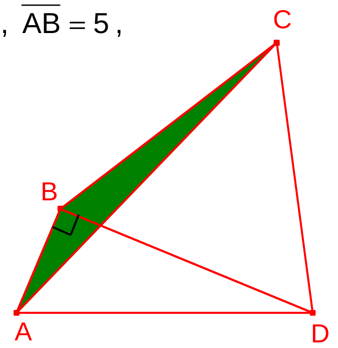
Solució:
$\overline{BT} = 1$ és perpendicular a la recta AT.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATB}$:
$\overline{AT} = \sqrt{3}$.
Siga H la projecció de T sobre el costat $\overline{AD}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATB}$, $\overset{\Delta}{THA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{TH}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AB}}. \quad \overline{TH} = \frac{\overline{AT}^2}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADT}$ és:

$$S_{ADT} = \frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{TH} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

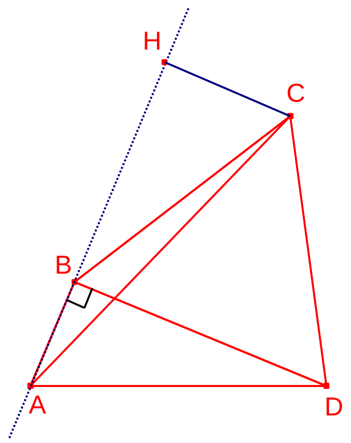
1342.- Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura si $\overline{AD}=13$, $\overline{AB}=5$, $\angle ABD=90^{o}$ i el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és equilàter.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD}=12$.
Siga H la projecció de C sobre la recta AB.
$\angle HBC=30^{o}$.
Aleshores, $\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=6$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

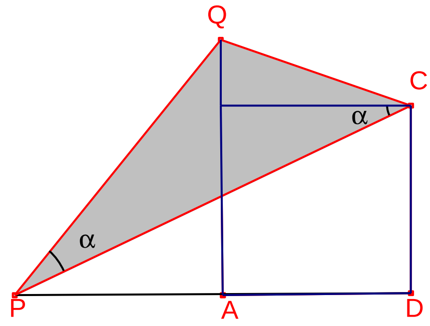
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15.$$



Nota: Per calcular l'àrea també hauríem pogut utilitzar la fórmula trigonomètrica:
$\angle ABC=150^{o}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin 150^{o}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12\cdot\frac{1}{2}=15.$$

1343.- Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQC}$ si ABCD és un quadrat, $\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=20$ i $\alpha=\angle BCP=\angle QPC$.



Solució:

$\angle CPD=\angle BCP=\alpha$.

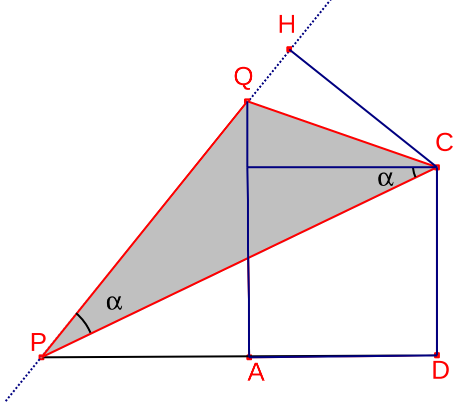
Siga H la projecció de C sobre la recta PQ.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDC}$, $\overset{\Delta}{PHC}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CH}=\overline{CD}=\overline{AB}$.

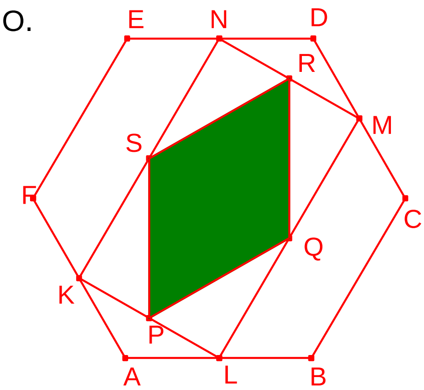
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQC}$ és:

$$S_{PQC}=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{CH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 20=10.$$



1344.- En la figura, ABCDEF és un hexàgon regular de centre O.

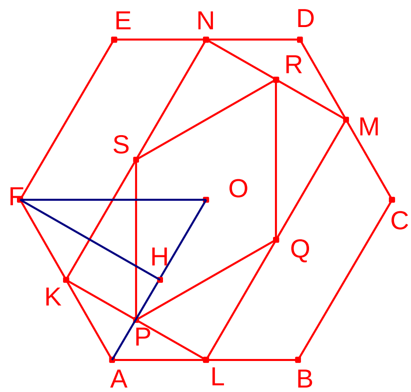
K, L, M, N són punts migs dels costats.
P, Q, R, S són punts migs dels rectangle KLMN.
Calculeu la proporció entre les àrees de PQRS i l'hexàgon ABCDEF.



Solució:
PQRS és un rombe.
Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular.
$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AB} = 2c$.
$\overline{LM}$ és paral·lela mitjana del trapezi ABCD, aleshores,

$$\overline{LM} = \frac{1}{2}\left(\overline{AD} + \overline{BC}\right) = \frac{3}{2}c.$$

$$\overline{PR} = \overline{LM} = \frac{3}{2}c.$$



Siga H la projecció de F sobre la diagonal $\overline{AD}$.
$\overset{\Delta}{AOF}$ és un triangle equilàter, aleshores:

$$\overline{FH} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{SQ} = \overline{FH} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

L'àrea del rombe PQRS és:

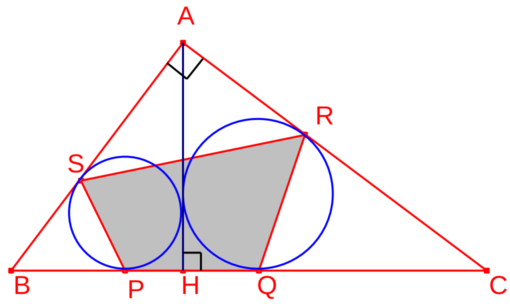
$$S_{PQRS} = \frac{1}{2}\overline{PR} \cdot \overline{SQ} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{3\sqrt{3}}{8}c^2.$$

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és igual a l'àrea de sis triangles equilàters de costat c:

$$S_{ABCDEF} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

La proporció entre l'àrea del rombe i l'hexàgon és:

$$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}c^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2} = \frac{1}{4}.$$



1345.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle $A = 90^o$.

$\overline{AH}$ és altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

La circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BHA}$ té radi 3.

La circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AHC}$ té radi 4.
P, Q, R, S són punts de tangència.
Determineu l'àrea del quadrilàter PQRS.

Solució:
$\overline{HP} = 3$, $\overline{HQ} = 4$. Siga $\overline{AB} = c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BHA}$, $\overset{\Delta}{AHC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = \frac{3}{4}$. Aleshores, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$

Els triangles $\overset{\Delta}{BHA}$, $\overset{\Delta}{CAB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BH} = \frac{3}{5}c$, $\overline{AH} = \frac{4}{5}c$.

$$\overline{HP} = \frac{\overline{BH} + \overline{AH} - \overline{AB}}{2} = \frac{\frac{3}{5}c + \frac{4}{5}c - c}{2} = \frac{1}{5}c.$$

$\overline{HP} = 3 = \frac{1}{5}c$. Resolent l'equació: $c = 15$.

$a = \overline{BC} = \frac{5}{3}c = 25$. $b = \overline{AC} = \frac{4}{3}c = 20$. $\overline{AH} = \frac{4}{5}c = 12$. $\overline{BH} = \frac{3}{5}c = 9$.

$\sin B = \frac{4}{5}$, $\sin C = \frac{3}{5}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{1}{2}a\overline{AH} = \frac{1}{2}25 \cdot 12 = 150$.

$$\overline{BP} = \overline{BS} = \frac{\overline{BH} + \overline{AB} - \overline{AH}}{2} = \frac{9 + 15 - 12}{2} = 6.$$

$\overline{AS} = \overline{AB} - \overline{BP} = 15 - 6 = 9$.

$$\overline{CQ} = \overline{CR} = \frac{\overline{CH} + \overline{AC} - \overline{AH}}{2} = \frac{16 + 20 - 12}{2} = 12.$$

$\overline{AR} = \overline{AC} - \overline{CR} = 20 - 12 = 8$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BPS}$ és: $S_{BPS} = \frac{1}{2}\overline{BP} \cdot \overline{BS} \cdot \sin B = \frac{1}{2}6 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{72}{5}$.

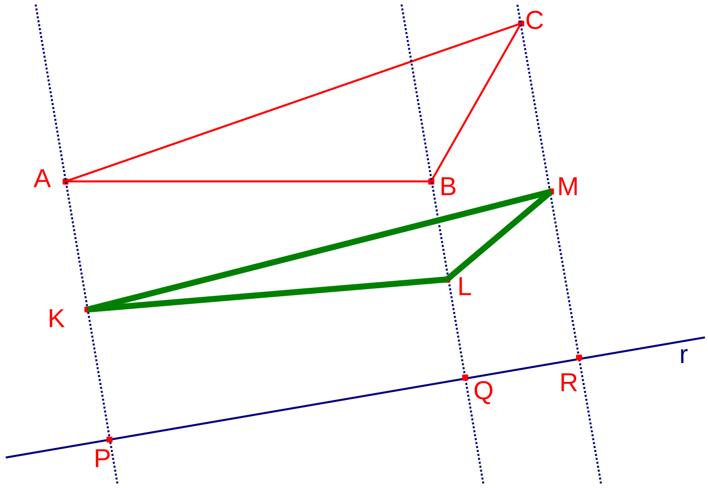
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CQR}$ és: $S_{CQR} = \frac{1}{2}\overline{CQ} \cdot \overline{CR} \cdot \sin C = \frac{1}{2}12 \cdot 12 \cdot \frac{3}{5} = \frac{216}{5}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ARS}$ és: $S_{BPS} = \frac{1}{2}\overline{AR} \cdot \overline{AS} = \frac{1}{2}9 \cdot 8 = 36$.

L'àrea del quadrilàter PQRS és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BPS}$, $\overset{\Delta}{CQR}$, $\overset{\Delta}{ARS}$:

$$S_{PQRS} = S_{ABC} - (S_{BPS} + S_{CQR} + S_{ARS}) = 150 - \left(\frac{72}{5} + \frac{216}{5} + 36\right) = \frac{282}{5}.$$

1346.- L'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 5.



Siga r una recta exterior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen P, Q, R les projeccions de A, B, C sobre r, respectivament.
Determineu l'àrea del triangle que es forma a l'unir els punts migs dels segments $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$.

Solució:
Siguen $\overline{AP} = x$, $\overline{BQ} = y$, $\overline{CR} = z$.
Siguen $\overline{PQ} = d$, $\overline{QR} = e$.
Suposem que Q està entre P i R (en cas contrari canviaríem les distàncies d, e).
Siguen K, L, M els punts migs dels segments $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$.
Siguen $\overline{KP} = \frac{x}{2}$, $\overline{LQ} = \frac{y}{2}$, $\overline{MR} = \frac{z}{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l'àrea del trapezi PRCA menys l'àrea dels trapezis PQBA i QRCB:

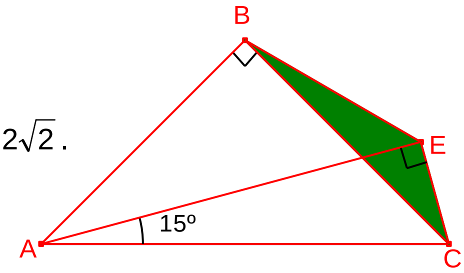
$$S_{ABC} = S_{PRCA} - (S_{PQBA} + S_{QRCB}) = \frac{x+z}{2}(d+e) - \left(\frac{x+y}{2}d + \frac{y+x}{2}e\right) = \frac{z-y}{2}d + \frac{x-y}{2}e$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és igual a l'àrea del trapezi PRMK menys l'àrea dels trapezis PQLM i QRML:

$$S_{KLM} = S_{PRMK} - (S_{PQLM} + S_{QRML}) = \frac{\frac{x}{2}+\frac{z}{2}}{2}(d+e) - \left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}}{2}d + \frac{\frac{y}{2}+\frac{x}{2}}{2}e\right) = \frac{z-y}{4}d + \frac{x.-y}{4}e$$

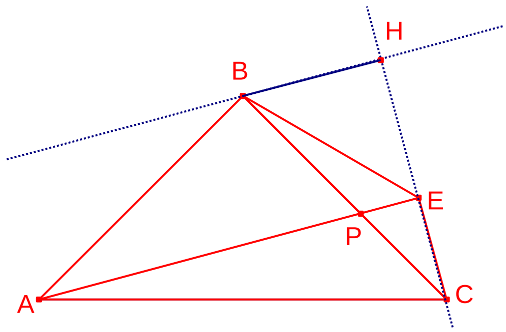
Notem que $S_{KLM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}5 = \frac{5}{2}$.

1347.- En la figura, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$.



El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles $B=90^o$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$.
El triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és rectangle $E=90^o$, $A=15^o$.

Solució:
Siga P la intersecció de $\overline{AE}$ i $\overline{BC}$.
$\angle BPC=\angle BAC-15^o=45^o–15^o=30^o$,
$\angle PCE=\angle ACE-\angle ACB=75^o–45^o=30^o$.



$\overline{BP}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}2\sqrt{2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$\overline{PC}=\overline{BC}-\overline{BP}=2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

$\overline{CE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

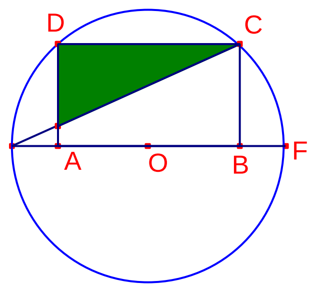
Siga H la projecció de B sobre la recta CE.

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és:

$S_{BCE}=\frac{1}{2}\overline{CE}\cdot\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\sqrt{3}-1$.

1348.- Determineu l'àrea de la regió ombrejada, si el radi de la circumferència és 6, el segment $\overline{BF}=2$ i ABCD és un rectangle.



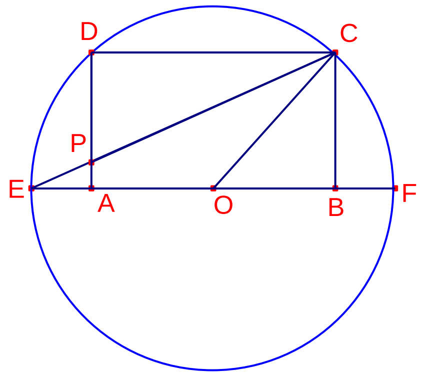
Solució:

$\overline{OF}=\overline{OC}=6$.

$\overline{OB}=\overline{OF}-\overline{BF}=6-2=4$.

$\overline{AB}=\overline{CD}=2\cdot\overline{OB}=8$.

$\overline{EA}=\overline{BF}=2$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:

$\overline{BC}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$.

Siga $x=\overline{PD}$.

$\overline{AP}=\overline{AD}-x=2\sqrt{5}-x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EAP}$, CDP són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

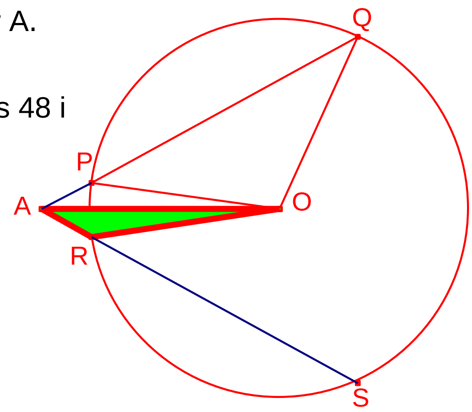
$\frac{x}{8}=\frac{2\sqrt{5}-x}{2}$. Resolent l'equació:

$x=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

L'àrea del triangle rectangle CDP és:

$S_{CDP}=\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{PD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{32\sqrt{5}}{5}$.

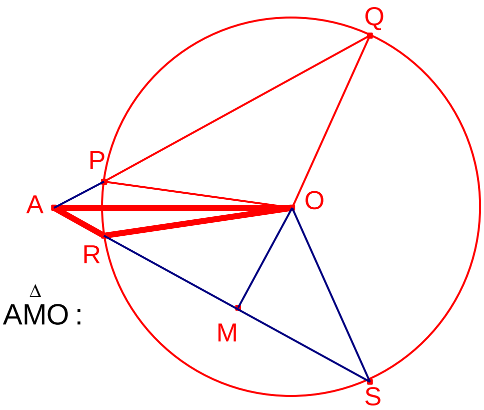
1349.- Siga una circumferència de centre O i un punt exterior A.



(veure figura). Siga $\overline{PQ} = \overline{RS} = 16$, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és 48 i $\overline{AO} = \sqrt{157}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOR}$.

Solució:



Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{OPQ}$, $\overset{\Delta}{ORS}$ són iguals.
Siga M el punt mig del segment $\overline{RS}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ORS}$ és 48, aleshores:

$S_{ORS} = \dfrac{16 \cdot \overline{OM}}{2} = 48$. Resolent l'equació:

$\overline{OM} = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

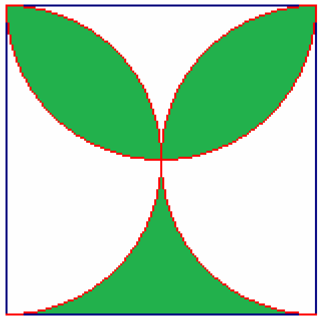
$\left(\sqrt{157}\right)^2 = 6^2 + \left(\overline{AR} + 8\right)^2$. Resolent l'equació:

$\overline{AR} = 3$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOR}$ és:

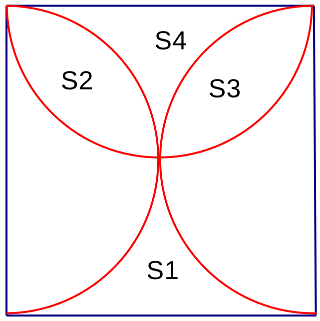
$S_{AOR} = \dfrac{1}{2}\overline{AR} \cdot \overline{OM} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$.

1350.- En la figura a un quadrat de costat c s'han dibuixat 3 semicircumferències.



Determineu l'àrea i el perímetre de la regió ombrejada.

Solució:
La regió S1 és igual a la regió S4.



$S1 + S2 + S3 = S4 + S2 + S3$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un semicercle de radi $\frac{c}{2}$:

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}c^2 .$$

El perímetre és igual a la suma de sis quadrants de radi $\frac{c}{2}$:

$$P = 6\left(\frac{1}{4}2\pi\frac{c}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}c .$$