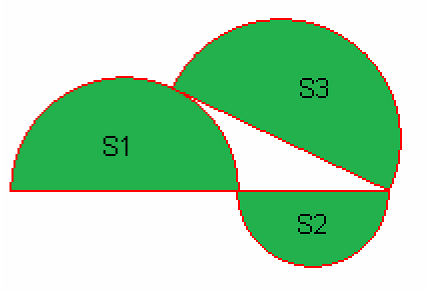
Problemes de Geometria per a l'ESO 136

1351.- En la figura s'han dibuixat tres semicercles.
Si l'àrea de S1 és 9 i la de S2 és 4, determineu l'àrea del semicercle S3.



Solució:

Siga $\overline{CT} = 2r_3$ del semicercle S3.

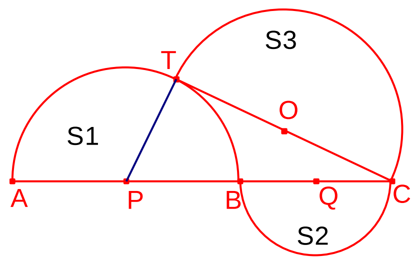
T és punt de tangència de CT i la semicircumferència S1.

Siga $\overline{PT} = \overline{PB} = r_1$ radi de la semicircumferència S1.

Siga $\overline{BC} = 2r_2$ diàmetre del semicercle S2.

$\angle PTC = 90^{o}$.

$\overline{PC} = r_1 + 2r_2$.



L'àrea de S1 és 9 aleshores, $\frac{1}{2}\pi {r_1}^2 = 9$. Aleshores:

$${r_1}^2 = \frac{18}{\pi}.$$

L'àrea de S2 és 4 aleshores, $\frac{1}{2}\pi {r_2}^2 = 4$. Aleshores:

$${r_2}^2 = \frac{8}{\pi}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTC}$:

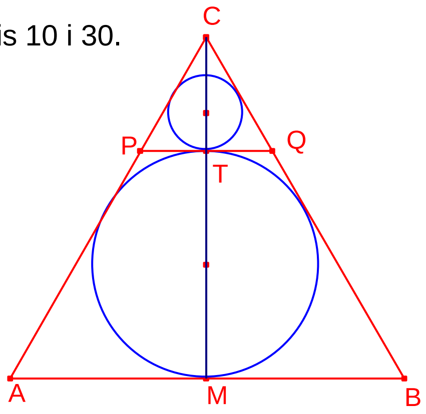
$$(2r_3)^2 = (r_1 + 2r_2)^2 - {r_1}^2.$$

$$4 \cdot {r_3}^2 = 4 \cdot {r_2}^2 + 4 \cdot r_1 \cdot r_2$$

$${r_3}^2 = {r_2}^2 + r_1 \cdot r_2 = \frac{8}{\pi} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}} = \frac{20}{\pi}.$$

L'àrea del semicercle S3 és:

$$S3 = \frac{1}{2}\pi {r_3}^2 = 10.$$



1352.- Siguen dues circumferències tangents exteriors de radis 10 i 30.

Determineu l'àrea del triangle isòsceles circumscrit a les dues circumferències.

Solució.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ circumscrit a les dues circumferències.
Siga $\overline{PQ}$ tangent a les dues circumferències en T.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$ són semblants de raó 30:10.
Siga $\overline{AB}=c$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
Siga $\overline{CM}=h$.
$\overline{MT}=60$.
$\overline{CT}=h-60$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$:
$\frac{h}{h-60}=\frac{30}{10}$. Resolent l'equació:
$h=90$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+90^2}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+32400}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC}=\frac{c\cdot h}{2}=\frac{c+\overline{AC}+\overline{BC}}{2}r$, on $r=30$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

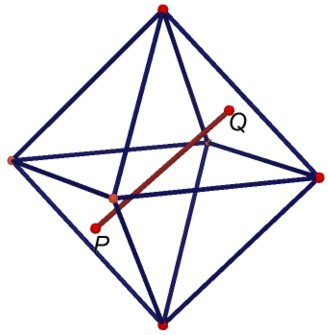
$$\frac{c\cdot 90}{2}=\frac{c+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{c^2+32400}}{2}\cdot 30.$$ Simplificant:

$2c=\sqrt{c^2+32400}$. Resolent l'equació:
$c=60\sqrt{3}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{c\cdot h}{2}=\frac{60\sqrt{3}\cdot 90}{2}=2700\sqrt{3}.$$

1353.- El segment que uneix el baricentre de dues cares oposades d'un octaedre regular mesura $\overline{PQ} = d$, calculeu l'àrea de l'octaedre.



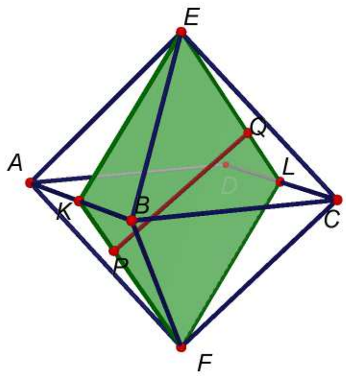
Solució:

Siga l'octaedre ABCDEF d'aresta $\overline{AB} = a$, de centre O.

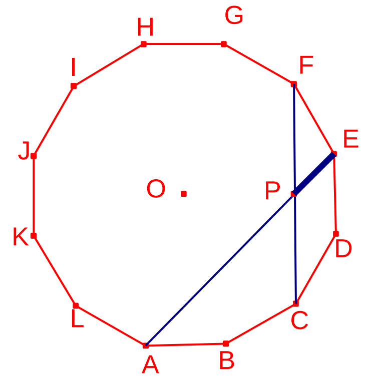
Siga K el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga L el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$.

La secció EKFL conté els punts O, P, Q.



1354.- En un dodecàgon regular ABCDEFGHIJKL de costat $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{AE}$ i $\overline{CF}$ s'intersecten en P. Calculeu la mesura del segment $\overline{PE}$.



Solució:

$\angle CFE$ angle inscrit, abraça $\frac{2}{12}$ parts de circumferència:

$\angle CFE=\frac{1}{2}\frac{360^o}{6}=30^o$.

$\angle FPE$ angle interior, la suma dels arcs que abraça són $\frac{3}{12}$ parts de circumferència:

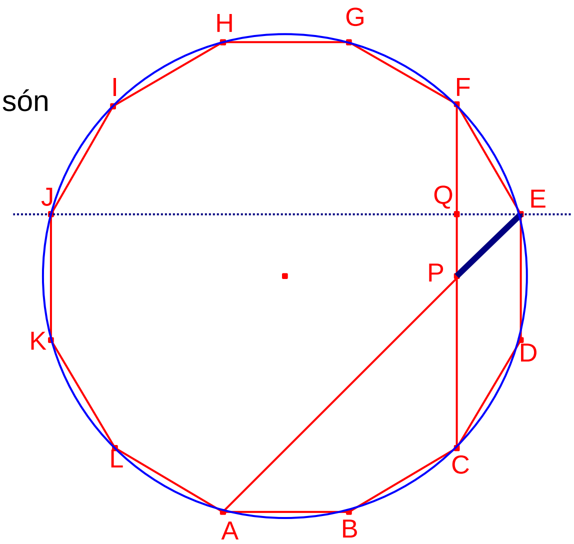
$\angle FPE=\frac{1}{2}\frac{360^o}{4}=45^o$.

Siga Q la projecció de E sobre $\overline{CF}$.

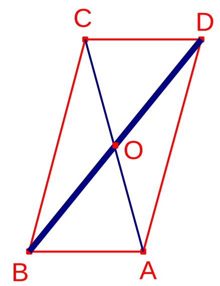
$\overline{EQ}=\frac{1}{2}\overline{FE}$.

$\overline{PE}=\overline{EQ}\sqrt{2}$.

$\overline{PE}=\frac{1}{2}\overline{EF}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$.



1355.- Siga el paral·lelogram ABCD tal que $\overline{BC}=\overline{AC}$, $\angle CAD=30^o$ i $\overline{AD}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.



Determineu la mesura de la diagonal $\overline{BD}$.

Solució:

$\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és isòsceles.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\cos 30^o$.

$\overline{CD}^2=2\overline{AD}^2-\overline{AD}^2\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)\overline{AD}^2$.

Siga O la intersecció de les diagonals.

$\overline{OD}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$$\overline{OD}^2=\frac{2\overline{CD}^2+2\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}{4}.$$

$$\overline{OD}^2=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)\overline{AD}^2+2\overline{AD}^2-\overline{AD}^2}{4}.$$

$$\overline{OD}^2=\frac{\left(5-2\sqrt{3}\right)\overline{AD}^2}{4}.$$

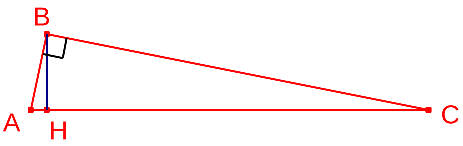
$$\overline{OD}^2=\frac{\left(5-2\sqrt{3}\right)\left(5+2\sqrt{3}\right)}{4}.$$

$$\overline{OD}^2=\frac{13}{4}.$$

$$\overline{OD}=\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$\overline{BD}=2\overline{OD}=\sqrt{13}$.

1356.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 11^{\circ}\,15'$ i



la hipotenusa $\overline{AC} = 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.
Determineu la mesura de la menor altura del triangle.

Solució:
La menor altura del triangle rectangle correspon a l'altura sobre la hipotenusa.
Siga $\overline{BH}$ altura sobre la hipotenusa.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AB} = \overline{AC}\cdot\sin\frac{45^{\circ}}{4},\ \overline{BC} = \overline{AC}\cdot\cos\frac{45^{\circ}}{4}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}.$$

$$\overline{AC}\cdot\overline{BH} = \overline{AC}\cdot\sin\frac{45^{\circ}}{4}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\frac{45^{\circ}}{4}.$$ Simplificant:

$$\overline{BH} = \overline{AC}\cdot\frac{1}{2}2\cdot\sin\frac{45^{\circ}}{4}\cos\frac{45^{\circ}}{4}.$$

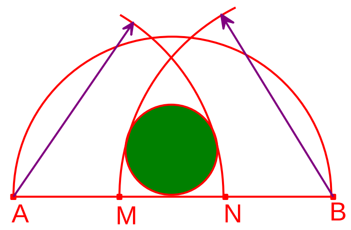
$$\overline{BH} = \overline{AC}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{45^{\circ}}{2}.$$

$$\overline{BH} = \overline{AC}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos 45^{\circ}}{2}}.$$

$$\overline{BH} = 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.$$

$$\overline{BH} = 1.$$

1357.- En la figura, $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$, $\overline{AB} = 2R$.



Determineu l'àrea de la regió ombrejada.

Solució:

Siga O el centre del cercle ombrejat.

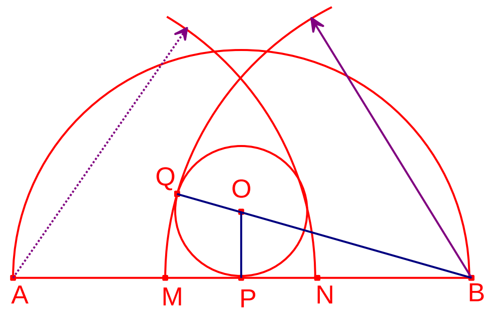
Siga $\overline{OQ} = \overline{OP} = r$ el radi.

P és el punt mig del segment $\overline{AB} = 2R$.

$\overline{BM} = \overline{BQ} = \frac{4}{3}R$.

$\overline{BP} = R$.

$\overline{BO} = \overline{BQ} - \overline{OQ} = \frac{4}{3}R - r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPB}$:

$\left(\frac{4}{3}R - r\right)^2 = r^2 + R^2$. Resolent l'equació:

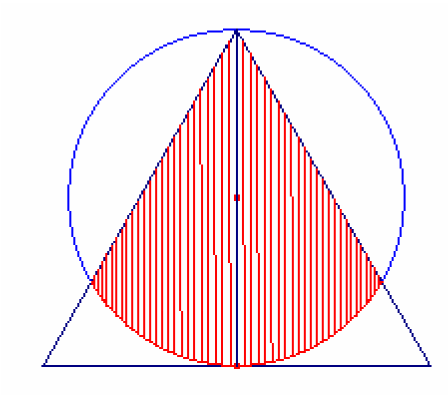
$r = \frac{7}{24}R$.

L'àrea del cercle de radi r.

$S = \pi r^2 = \frac{49\pi}{576}R^2$.

1358.- Agafant com diàmetre l'altura d'un triangle equilàter de costat 4 es dibuixa una circumferència.

Calculeu l'àrea comuna a la circumferència i el triangle.

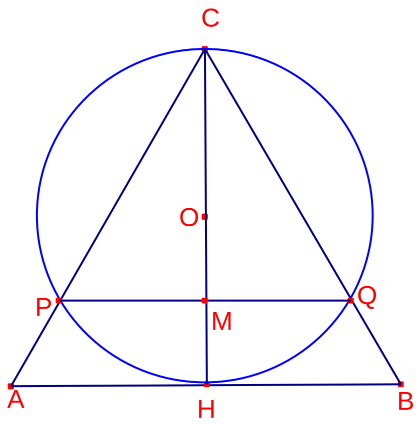


Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB}=4a$.

Siga H el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}=2a\sqrt{3}$.



Siga O el punt mig de l'altura $\overline{CH}$.

Siguen P i Q els punts intersecció del triangle i de la circumferència de diàmetre $\overline{CH}$.

$\overline{OC}=\overline{OP}=\overline{OQ}=\frac{1}{2}\overline{CH}=a\sqrt{3}$.

O és el centre de la circumferència circumscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQC}$:

$\angle POC=\angle POQ=\angle QOC=120º$

$\angle OPQ=30º$

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

$\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OP}=\frac{3}{2}a$.

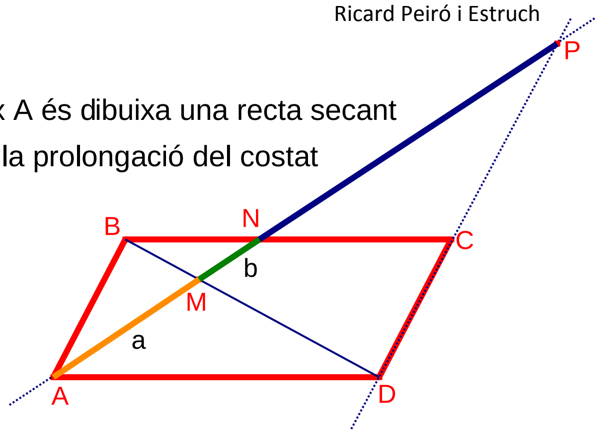
$\overline{PQ}=2\overline{PM}=3a$.

L'àrea ombrejada és igual a la suma de l'àrea d'un sector circular de radi $\overline{OP}=a\sqrt{3}$ i angle 120º i $\frac{2}{3}$ parts de l'àrea del triangle equilàter de costat $\overline{PQ}=3a$:

$$S=\frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2=\pi\cdot a^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=\left(\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

1359.- En un paral·lelogram ABCD, pel vèrtex A és dibuixa una recta secant a la diagonal $\overline{BD}$ en M, al costat $\overline{BC}$ en N i a la prolongació del costat $\overline{DC}$ en P.

Si $\overline{AM}=a$ i $\overline{MN}=b$, calculeu $\overline{NP}$.



Solució:

Siga $\overline{AD}=x$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADM}$, $\overset{\Delta}{NBM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BN}}{x}=\frac{b}{a}$. Aleshores, $\overline{BN}=\frac{b}{a}x$.

$\overline{CN}=x-\overline{BN}=\frac{a-b}{a}x$.

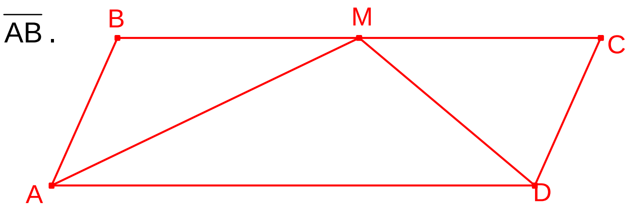
Els triangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{NCP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{NP}}{a+b+\overline{NP}}=\frac{\frac{a-b}{a}x}{x}$. Simplificant:

$\frac{\overline{NP}}{a+b+\overline{NP}}=\frac{a-b}{a}$. Resolent l'equació:

$\overline{NP}=\frac{a^2-b^2}{a}$.

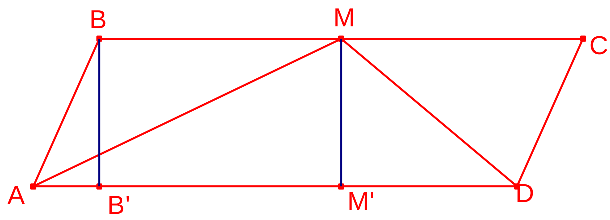
1360.- Siga el paral·lelogram ABCD tal que $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{AB}$.



Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$ si $\overline{AM} = 9$ i $\overline{DM} = 6$.

Solució 1.

Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = 3a$. $\overline{BM} = \frac{3}{2}a$.



Siga B' la projecció de B sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga M' la projecció de M sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga $\overline{AB'} = x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AB'B}$:

$$\overline{BB'}^2 = 6^2 - x^2 \qquad (1)$$

$\overline{AM'} = x + \frac{3}{2}a$, $\overline{DM'} = \frac{3}{2}a - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AM'M}$:

$$\overline{BB'}^2 = 9^2 - \left(x + \frac{3}{2}a\right)^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DM'M}$:

$$\overline{BB'}^2 = 6^2 - \left(\frac{3}{2}a - x\right)^2 \qquad (3)$$

Igualant les expressions (1) (2) (3):

$\begin{cases} 6^2 - x^2 = 9^2 - \left(x + \frac{3}{2}a\right)^2 \\ 9^2 - \left(x + \frac{3}{2}a\right)^2 = 96^2 - \left(\frac{3}{2}a - x\right)^2 \end{cases}$. Simplificant: $\begin{cases} 81 - \frac{13}{4}a^2 - 3ax = 0 \\ 2ax = 15 \end{cases}$. Resolent l'equació: $\begin{cases} a = 3\sqrt{2} \\ x = 5\sqrt{2} \end{cases}$.

Solució 2:

Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = 3a$. $\overline{BM} = \frac{3}{2}a$. Siga N el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Els paral·lelograms ANMB, NDCM són iguals. $\overline{BN} = \overline{DM} = 6$.

Siga P la intersecció de $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$. P és el punt mig de les diagonals.

$\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{9}{2}$. La mitjana del $\overline{MP}$ del triangle $\overset{\Delta}{BNM}$ és:

$$\overline{MP}^2 = \frac{1}{4}\left(2\overline{BM}^2 + 2\overline{NM}^2 - \overline{BN}^2\right).$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(2\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + 2a^2 - 6^2\right).$$

Resolent l'equació: $a = 3\sqrt{2}$.