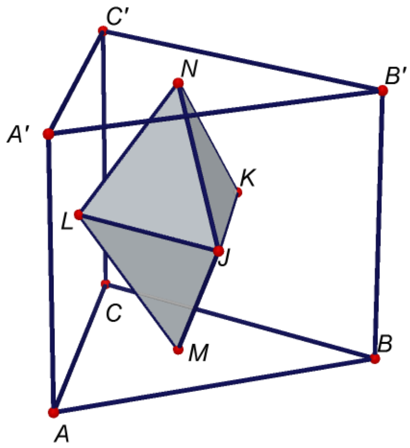
Problemes de Geometria per a l'ESO 137

1361.- Donat un prisma triangular regular, agafant els punts migs de les cares s'inscriu un políedre (políedre dual).
Si el poliedre dual té totes les arestes iguals, determineu la proporció entre l'altura del prisma i l'aresta de la base del prisma.
Determineu la proporció entre els volums del políedre dual i del prisma.



Solució:
Siga ABCA'B'C' el prima regular d'aresta de la base $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{AA'} = b$.
Siga JKLMN la dipiràmide dual.
M, N són els baricentres de les bases del prisma
Aquesta dipiràmide té totes les arestes iguals.

$$\overline{JK} = \overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}a.$$

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.

$$\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{6}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

$$\overline{LP} = \frac{1}{2}b.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PML}$:

$$\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2$$. Simplificant:

$$b = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3.$$

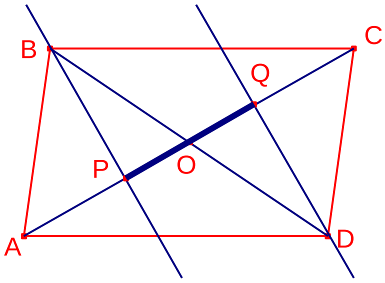
El volum del políedre dual és:

$$V_{dual} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}a\right)^2 b = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}a\right)^2\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{48}a^3.$$

La proporció entre els volums del políedre dual i del prisma és:

$$\frac{V_{dual}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{48}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{4}a^3} = \frac{1}{12}.$$

1362.- Siga el paral·lelogram ABCD si $\overline{BC}=8$, $\overline{CD}=5$ i $\overline{AC}=10$.



Calculeu la projecció de $\overline{BD}$ sobre $\overline{AC}$.

Solució:

$\overline{AC}=10$ és la diagonal major ja que $\overline{AC}^2>\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, $10^2>5^2+8^2$, per tant, $\angle ABC$ és obtusangle.

Siga P la projecció de B sobre $\overline{AC}$.

Siga Q la projecció de D sobre $\overline{AC}$.

La projecció de $\overline{BD}$ sobre $\overline{AC}$ és el segment $\overline{PQ}$.

Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{23\cdot 3\cdot 7\cdot 13}}{4}=\frac{\sqrt{6279}}{4}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BP}}{2}.$$

$$\frac{10\cdot\overline{BP}}{2}=\frac{\sqrt{6279}}{4}.$$

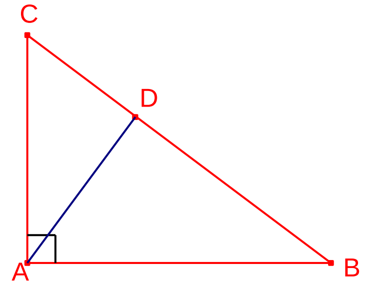
$$\overline{BP}=\frac{\sqrt{6279}}{20}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$$\overline{AP}^2=5^2-\left(\frac{\sqrt{6279}}{20}\right)=\frac{3721}{400}.$$

$$\overline{AP}=\frac{61}{20}.$$

$$\overline{PQ}=\overline{AC}-2\cdot\overline{AP}=10-2\frac{61}{20}=\frac{39}{10}.$$



1363.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de catets $\overline{AB}=40$, $\overline{AC}=30$.

Es traça l'altura $\overline{AD}$ corresponent a la hipotenusa.

Calculeu la diferència entre els perímetres dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{ACD}$.

Solució:

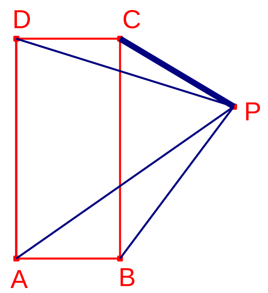
La diferència entre els perímetres dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{ACD}$ és:
$\left(40+\overline{AD}+\overline{BD}\right)-\left(30+\overline{AD}+\overline{CD}\right)=10+\overline{BD}-\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC}=50$.

Aplicant el teorema del catet triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$40^2=\overline{BD}\cdot 50$.
$\overline{BD}=32$.
$\overline{CD}=50-32=18$.

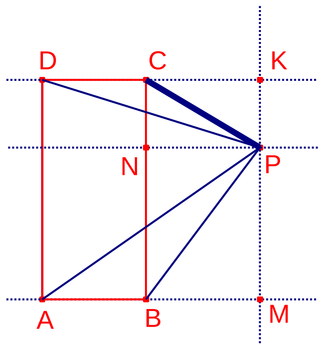
Aleshores, la diferència entre els perímetres dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{ACD}$ és:
$10+\overline{BD}-\overline{CD}=10+32-18=24$.

1364.- Siga el rectangle ABCD.



Siga el punt P exterior al rectangle relatiu al costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{PA}=7$, $\overline{PB}=5$, $\overline{PD}=6$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PC}$.

Solució:



Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=\overline{CD}=a$, $\overline{AD}=\overline{BC}=b$.
Siga K la projecció de P sobre la recta CD.
Siga M la projecció de P sobre la recta AB.
Siga N la projecció de P sobre la recta BC.
Siga $\overline{BM}=\overline{PN}=\overline{CK}=x$, $\overline{PM}=\overline{BN}=y$.
$\overline{PK}=\overline{CN}=b-y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$$7^2=(a+x)^2+y^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMP}$:

$$5^2=x^2+y^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKP}$:

$$6^2=(a+x)^2+(b-y)^2 \qquad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKP}$:

$$\overline{PC}^2=x^2+(b-y)^2 \qquad (4)$$

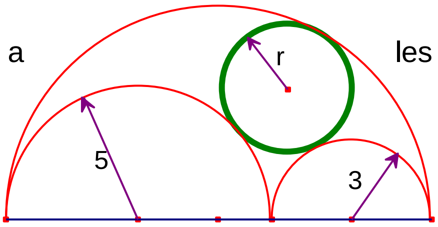
Sumant les expressions (2) i (3) i restant l'expressió (1):

$$x^2+(b-y)^2=5^2+6^2-7^2 \qquad (5)$$

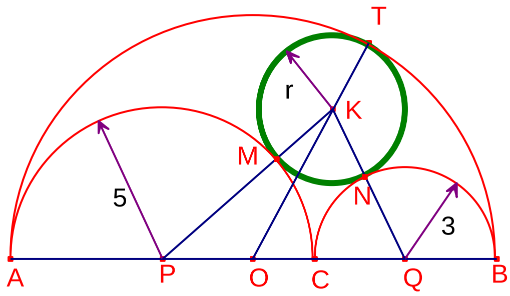
$\overline{PC}^2=x^2+(b-y)^2=5^2+6^2-7^2=12$.

$\overline{PC}=2\sqrt{3}$.

1365.- Calculeu el radi r de la circumferència tangent a les tres semicircumferències.



Solució:
En la figura:
$\overline{AB}=18$, $\overline{OA}=\overline{OB}=8$, $\overline{PA}=\overline{PC}=5$, $\overline{QC}=\overline{QB}=3$.
$\overline{OP}=3$, $\overline{OQ}=5$.
$\overline{PK}=5+r$, $\overline{OK}=8-r$, $\overline{QK}=3+r$.
Siga $\alpha=\angle KPQ$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{POK}$:
$(8-r)^2=3^2+(5+r)^2-2\cdot 3\cdot(5+r)\cos\alpha$.

$$(5+r)\cos\alpha=\frac{13r-15}{3} \qquad (1)$$

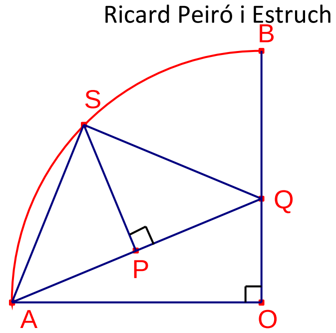
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PQK}$:
$(3+r)^2=8^2+(5+r)^2-2\cdot 8\cdot(5+r)\cos\alpha$.

$$(5+r)\cos\alpha=\frac{r+20}{4} \qquad (2)$$

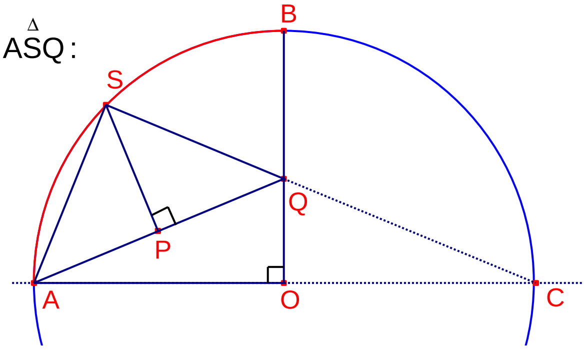
Igualant les expressions (1) (2):
$\frac{13r-15}{3}=\frac{r+20}{4}$. Resolent l'equació:
$r=\frac{120}{49}$.

1366.- En la figura, el quadrant té radi R i $\overline{AP}=\overline{PS}=\overline{PQ}$.

Determineu la mesura del segment $\overline{OQ}$.



Solució 1:
La recta AO talla la circumferència en el punt C.
$\angle ASQ=90^o$, aleshores la recta SQ passa pel punt C.
Siga $\overline{AP}=\overline{PS}=\overline{PQ}=x$.
Siga $a=\overline{OQ}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASQ}$:
$\overline{SQ}=x\sqrt{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOQ}$ $\overset{\Delta}{COQ}$ són iguals, aleshores:
$\overline{CQ}=\overline{AQ}=2x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOQ}$ $\overset{\Delta}{CSQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

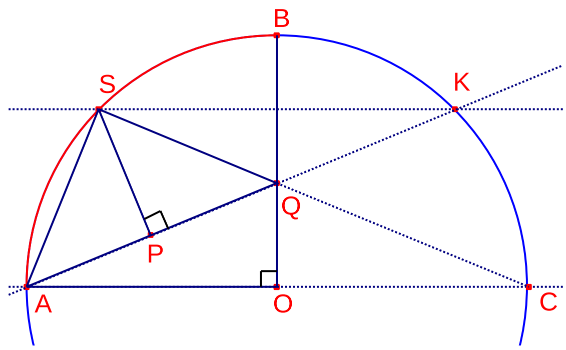
$$\frac{a}{R}=\frac{x\sqrt{2}}{x\left(2+\sqrt{2}\right)}.$$

Simplificant:

$$a=\overline{OQ}=R\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Solució 2:
La recta AQ talla la circumferència en el punt K.
$\angle SAQ=45^o$.

$\overset{\frown}{SK}=90^o$.
La recta AO talla la circumferència en el punt C.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOQ}$ $\overset{\Delta}{COQ}$ són iguals, aleshores:
ACKS és un trapezi.

$$\angle SCA=\angle KAC=\frac{180^o-90^o}{4}=\frac{45^o}{2}.$$

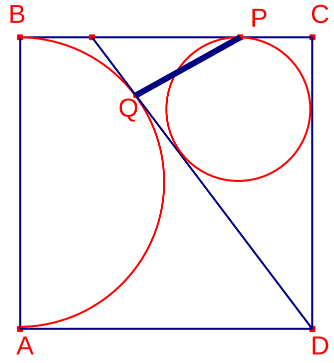
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOQ}$:

$$tg45^o=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}.$$

$$\frac{\overline{OQ}}{R}=tg45^o=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$

$$\overline{OQ}=R\left(\sqrt{2}-1\right).$$

1367.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat 40 (P i Q són punts de tangència).



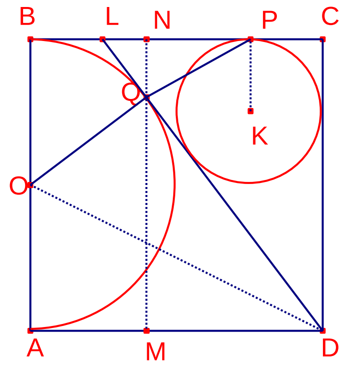
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$.

Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAO}$, $\overset{\Delta}{DQO}$ són iguals.
Siga $\alpha = \angle ADO = \angle QDO$.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$



$\angle LBC = 90º - 2\alpha$.
$\angle BLC = 2\alpha$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DCL}$ és 3:4:5, per tant:
$\overline{CL} = 30$, $\overline{DC} = 40$, $\overline{DL} = 50$.

$\overline{KP}$ és igual al radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LCD}$:

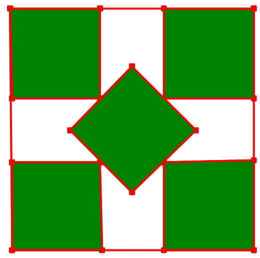
$$\overline{PC} = \overline{KP} = \frac{\overline{DC} + \overline{CL} - \overline{DL}}{2} = \frac{40+30-50}{2} = 10.$$

Siguen M, N les projeccions de Q sobre els costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivament.
$\overline{DQ} = \overline{AD} = 40$.

El triangle $\overset{\Delta}{QDM}$ és 3:4:5, per tant:
$\overline{DM} = 24$, $\overline{QM} = 32$, $\overline{DQ} = 40$.
$\overline{QN} = \overline{AB} - \overline{QM} = 40 - 32 = 8$.
$\overline{PN} = \overline{DM} - \overline{CP} = 24 - 10 = 14$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NQP}$.
$\overline{PQ} = \sqrt{14^2 + 8^2} = 2\sqrt{65}$.

1368.- En la figura hi ha 5 quadrats iguals en l'interior d'un quadrat de costat c.

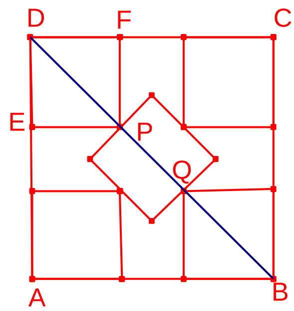


Determineu la mesura dels costats menuts.

Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Siga $x = \overline{DE}$ costat de quadrat menut DEPF.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangel rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangel rectangle $\overset{\Delta}{DEP}$:

$\overline{DP} = \overline{BQ} = x\sqrt{2}$.

$\overline{PQ} = x$

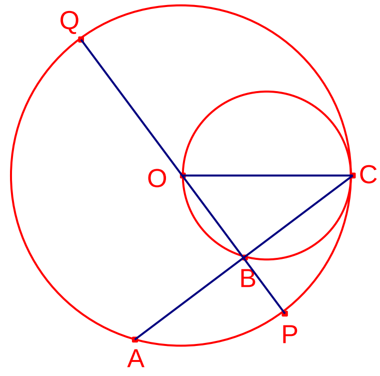
$\overline{BD} = 2\overline{DP} + \overline{PQ} = x\left(1 + 2\sqrt{2}\right)$.

$c\sqrt{2} = x\left(1 + \sqrt{2}\right)$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}c = \frac{4 - \sqrt{2}}{7}c.$$

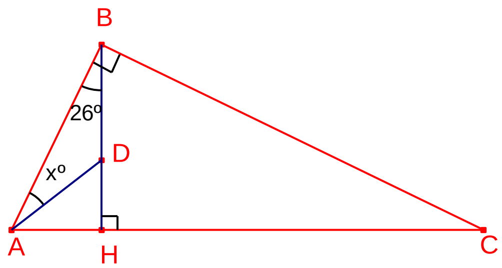
1369.- En la figura, calculeu $\overline{AB}$ si $\overline{PB}=3$ i $\overline{BQ}=12$.

O és centre de la circumferència gran.
C punt de tangència de les dues circumferències.



Solució:
$\angle OBC = 90^{o}$ per ser angle inscrit i abraçar un diàmetre.
OB és la recta mediatriu al segment $\overline{AC}$, aleshores:
$\overline{AB}=\overline{CB}$.
Aplicant la potència del punt B respecte de la circumferència gran:
$\overline{PB}\cdot\overline{QB}=\overline{AB}\cdot\overline{CB}$.
$3\cdot 12=\overline{AB}^2$.
Resolent l'equació:
$\overline{AB}=6$.

1370.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B=90^o$.



Siga D sobre l'altura $\overline{BH}$ tal que $\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.
Si $\angle ABBH=26^o$ calculeu l'angle $x=\angle BAD$.

Solució:
$C=26^o$. $A=64^o$.
$\angle DAH=64-x$.

Aplicant el teorema de catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB}^2=\overline{AH}\cdot\overline{AC}$.
$\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BC}$.
Dividint ambdues expressions:
$$1=\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$
$\cos(64^o-x)=\cos 26^o$.
$64^o-x=26^o$. Resolent l'equació:
$x=38^o$.