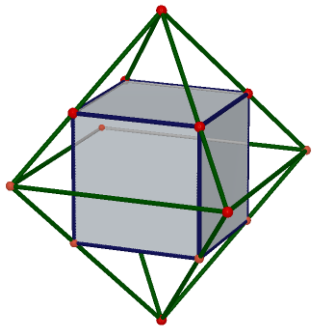
Problemes de Geometria per a l'ESO 138

1371.- Determineu l'aresta del cub inscrit en un octaedre regular d'aresta a si els vèrtexs del cub pertanyen a les arestes de l'octaedre.



Solució:

Siga ABCDEF l'octaedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.

$\angle EAF = 90º$.

Siga KLMNK'L'M'N' el cub inscrit en l'octaedre ABCDEFF.

Siga $\overline{KL} = x$ aresta del cub, $\overline{KK'} = x$.

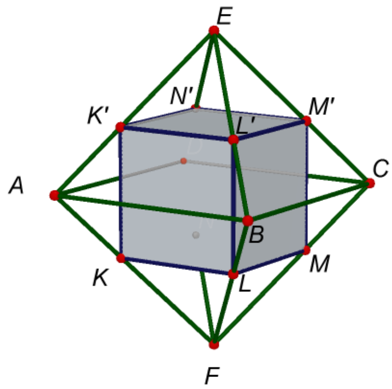
$\overline{EK'} = \overline{K'L'} = \overline{KL} = x$.

$\overline{AK'} = a - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKK'}$:

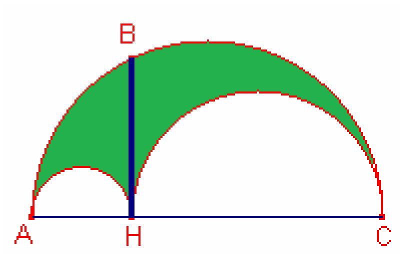
$x = (a - x)\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

$x = \left(2 - \sqrt{2}\right)a$.



1372.- En la figura, $\overline{BH} = d$.

Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $B = 90^{o}$.

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$d^2 = \overline{AH} \cdot \overline{CH} \qquad (1)$$

L'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AC}$ menys la suma de les àrees dels semicercles de radis $\overline{AH}, \overline{CH}$, respectivament:

$$S_{\text{ombrejada}} = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{\overline{AH}}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{\overline{CH}}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 - \overline{CH}^2\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\left(\overline{AH} + \overline{CH}\right)^2 - \overline{AH}^2 - \overline{CH}^2\right) =$$

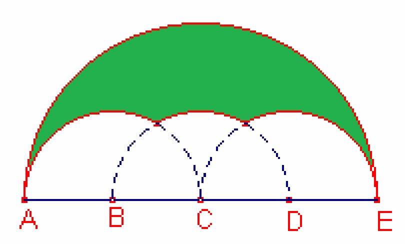
$$= \frac{\pi}{8}\left(2\overline{AH} \cdot \overline{CH}\right) =$$

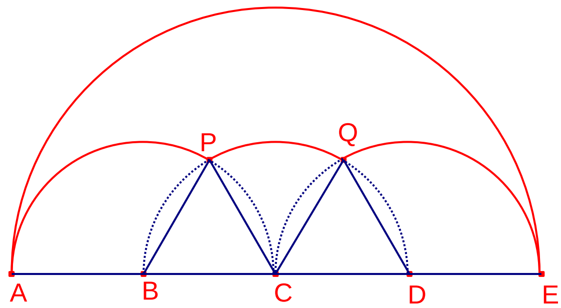
$$= \frac{\pi}{4}\left(\overline{AH} \cdot \overline{CH}\right).$$

Aplicant l'expressió (1):

$$S_{\text{ombrejada}} = \frac{\pi}{4}h^2.$$

1373.- En la figura, calculeu l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada.





Solució:

$\overline{AB}=\overline{BP}=\overline{CD}=\overline{CP}=\overline{DQ}=1$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{CDQ}$ són equilàters, per tant:

$\angle PBC=\angle BCP=\angle QCD=\angle CDQ=60^{o}$.

$\angle ABP=\angle QDE=120^{o}$, $\angle PCQ=60^{o}$.

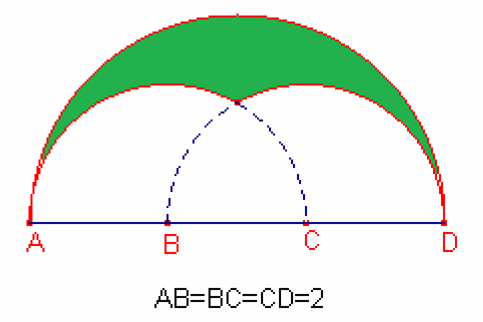
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del semicercle de radi 2, menys la suma de les àrees de dos sectors de radi 1 i 120º, un sector de radi 1 i 60º i dos triangles equilàters de costat 1:

$$S=\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2-\left(2\frac{120^o}{360^o}\pi\cdot 1^2+\frac{60^o}{360^o}\pi\cdot 1^2+2\frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right)=\frac{7}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 2.7992$$

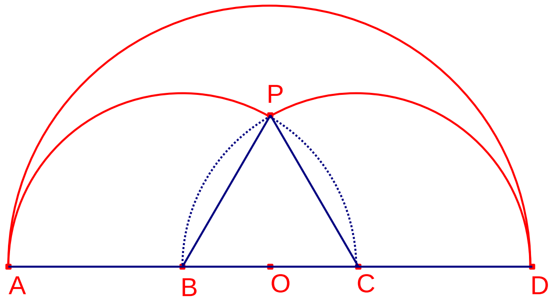
El perímetre de la zona ombrejada és igual a la suma d'una semicircumferència de radi 2, 2 arcs de radi 1 i 120º i un arc de radi 1 i 60º:

$$P=\frac{1}{2}2\pi\cdot 2+2\frac{120^o}{360^o}2\pi\cdot 1+\frac{60^o}{360^o}2\pi\cdot 1=\frac{11}{3}\pi\approx 11.5192\,.$$

1374.- En la figura, calculeu l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada.



Solució:



$\overline{AB}=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{CD}=2$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{CDQ}$ són equilàters, per tant:

$\angle PBC=\angle BCP=60^o$.

$\angle ABP=\angle PCD=120^o$.

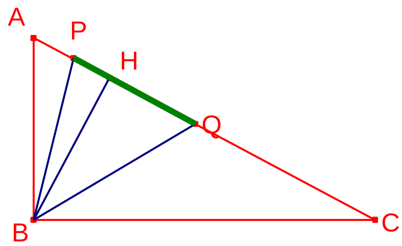
$\overline{OA}=\overline{OD}=3$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del semicercle de radi 3, menys la suma de les àrees de dos sectors de radi 2 i 120º i un triangles equilàter de costat 2:

$$S=\frac{1}{2}\pi\cdot 3^2-\left(2\frac{120^o}{360^o}\pi\cdot 2^2+\frac{\sqrt{3}}{4}2^2\right)=\frac{11}{6}\pi-\sqrt{3}\approx 4.0275.$$

El perímetre de la zona ombrejada és igual a la suma d'una semicircumferència de radi 3, 2 arcs de radi 2 i 120º:

$$P=\frac{1}{2}2\pi\cdot 3+2\frac{120^o}{360^o}2\pi\cdot 2=\frac{17}{3}\pi\approx 17.8024.$$



1375.- Els catets d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesuren

$\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 15$.

Es traça l'altura $\overline{BH}$ i les bisectrius $\overline{BP}$ i $\overline{BQ}$ dels angles $\angle ABH$ i $\angle HBC$, respectivament.

Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = 17$.

Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$.

$8^2 = 17 \cdot \overline{AH}$.

$\overline{AH} = \frac{64}{17}$.

$\overline{CH} = 17 - \overline{AH} = \frac{225}{17}$.

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{CH}$.

$\overline{BH}^2 = \frac{64}{17} \cdot \frac{225}{17}$.

$\overline{BH} = \frac{120}{17}$.

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

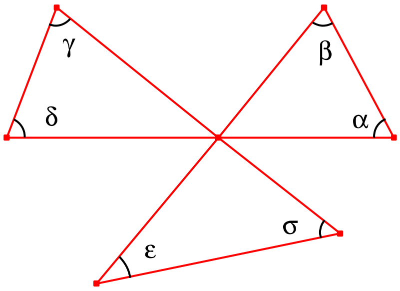
$\frac{\overline{PH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BH} + \overline{AB}}$. $\overline{PH} = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{AH}}{\overline{BH} + \overline{AB}} = \frac{\frac{120}{17} \frac{64}{17}}{\frac{120}{17} + 8} = \frac{30}{17}$.

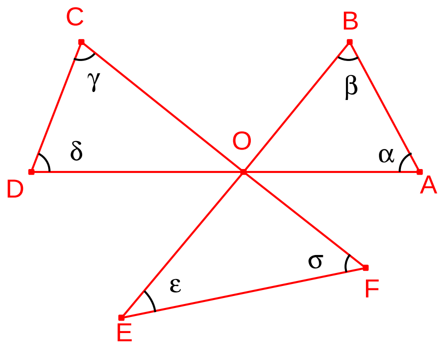
Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{BCH}$:

$\frac{\overline{QH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH} + \overline{BC}}$. $\overline{QH} = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{CH}}{\overline{BH} + \overline{BC}} = \frac{\frac{120}{17} \frac{225}{17}}{\frac{120}{17} + 15} = \frac{72}{17}$.

$\overline{PQ} = \overline{PH} + \overline{QH} = \frac{30}{17} + \frac{72}{17} = 6$.

1376.- En la figura, calculeu la suma de les mesures dels angles assenyalats.





Solució:

$\angle AOB = \angle DOE = 180^{o} - (\alpha + \beta)$.

$\angle COD = \angle AOF = 180^{o} - (\gamma + \delta)$.

$\angle BOC = \angle EOF = 180^{o} - (\varepsilon + \sigma)$.

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOF + \angle FOA = 360^{o}$.

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOF + \angle FOA = 2(\angle AOB + \angle COD + \angle EOF)$.

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOF + \angle FOA = 2(180^{o} - (\alpha + \beta) + 180^{o} - (\gamma + \delta) + 180^{o} - (\varepsilon + \sigma))$

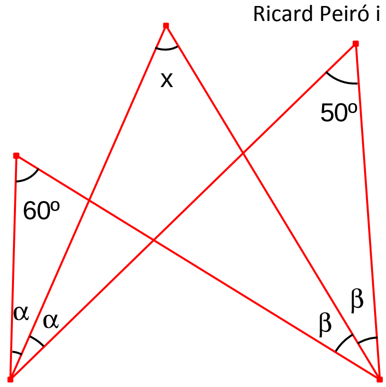
Igualant ambdues expressions:

$360^{o} = 2(180^{o} - (\alpha + \beta) + 180^{o} - (\gamma + \delta) + 180^{o} - (\varepsilon + \sigma))$.

$2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \sigma) = 720^{o}$.

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \sigma = 360^{o}$.

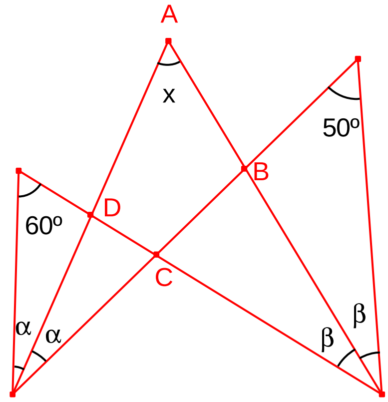
1377.- En la figura, calculeu el valor de l'angle x.



Solució:

$\angle ADC = 180º-(60º+\alpha) = 120º-\alpha$.

$\angle ABC = 180º-(50º+\beta) = 130º-\beta$.



$\angle BCD = 60º+2\alpha = 50º+2\beta$. Simplificant:

$\beta-\alpha = 5º$.

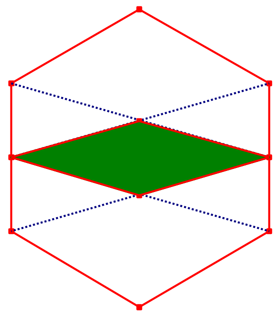
$A+B+C+D = 360º$.

$x+(130º-\beta)+(60º+2\alpha)+(120º-\alpha) = 360º$.

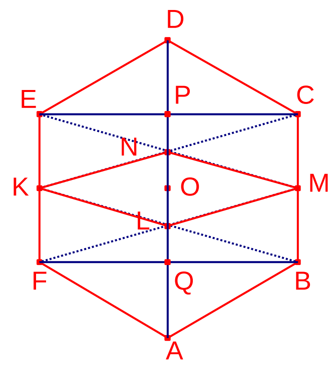
$x = 50º+\beta-\alpha$.

$x = 55º$.

1378.- Determineu la raó entre l'àrea de la regió ombrejada (rombe) i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:
Siga ABCDEF l'hexàgon regular.
Siga KLMN el rombe.



$\overline{NL} = \frac{1}{2}\overline{EF}$.

$\overline{PQ} = \overline{EF}$. Aleshores:

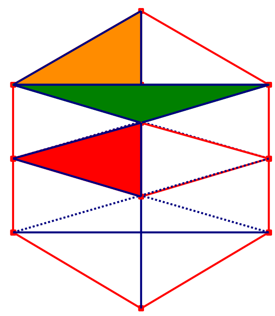
$\overline{NP} = \overline{LQ} = \frac{1}{4}\overline{EF}$.

$\overline{AD} = 2\overline{EF}$. Aleshores:

$\overline{PD} = \overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{EF}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EPD}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLN}$.

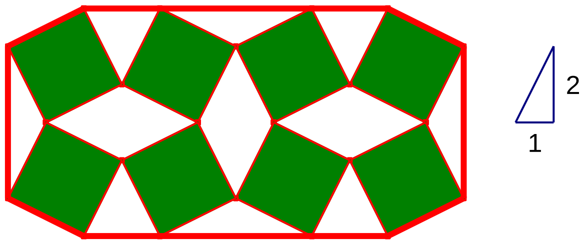
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ECN}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLN}$.



L'àrea del rombe KLMN és igual a l'àrea de 2 triangles $\overset{\Delta}{KLN}$.
L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és igual a l'àrea de 12 triangles $\overset{\Delta}{KLN}$.
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCDEF}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

1379.- Determineu la raó entre l'àrea de la regió ombrejada (8 quadrats) i l'àrea de l'octògon exterior.



Solució:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle de catets 1, 2, l'àrea de cadascun dels quadrats és:

$$S_q = 1^2 + 2^2 = 5 .$$

L'àrea ombrejada està formada per 8 quadrats d'àrea 5.

$$S_{ombrejada} = 8 \cdot 5 = 40 .$$

L'àrea no ombrejada és igual a l'àrea de 7 rombes de diagonals 2, 4:

$$S_{blanca} = 7 \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} = 28 .$$

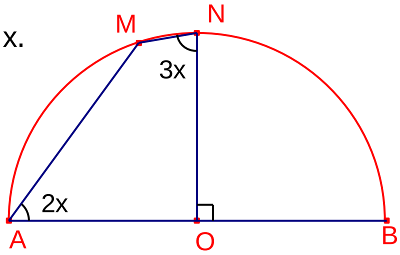
L'àrea de l'octògon és:

$$S_{octògon} = S_{ombrejada} + S_{blanca} = 40 + 28 = 68 .$$

La raó entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea de l'octògon exterior és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{octògon}} = \frac{40}{68} = \frac{10}{17} .$$

1380.- En la figura, calculeu el valor de l'angle x.



Solució:

Siga $x=\angle AOM$ angle central.

$$3x=\angle MNO=\frac{\angle AOM+\angle AON'}{2}=\frac{\alpha+90^{o}}{2} \qquad (1)$$

$$2x=\angle MAO=\frac{\angle MON+\angle NOB}{2}=\frac{(90^{o}-\alpha)+90^{o}}{2} \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} 3x=\dfrac{\alpha+90^{o}}{2} \\ 2x=\dfrac{18^{o}-\alpha}{2} \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x=27^{o} \\ \alpha=72^{o} \end{cases}$.