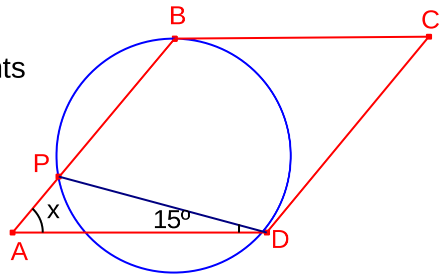
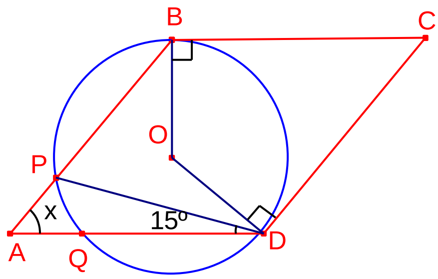
Problemes de Geometria per a l'ESO 139

1381.- En la figura, ABCD és un paral·lelogram, B, D són punts de tangència, $\angle ADP = 15^{o}$.
Determineu la mesura de l'angle x.



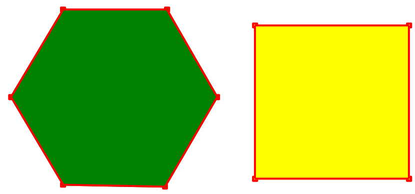
Solució:
Per ser ABCD un paral·lelogram $\angle BCD = \angle BAD = x$.
Siga O el centre de la circumferència.
Siga Q la intersecció del costat $\overline{AD}$ i la circumferència.
Per ser B i D punts de tangència:
$\angle OBC = \angle ODC = 90^{o}$.
$\angle BOD = 180^{o} - x$.
$\angle ADP = 15^{o}$ és un angle inscrit, aleshores:
$\overset{\frown}{PQ} = 2 \cdot \angle PDQ = 30^{o}$.
$\angle BAD = x$ és un angle exterior a la circumferència:



$$x = \angle BAD = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{180^{o} - x - 30^{o}}{2}.$$

$x = \dfrac{180^{o} - x - 30^{o}}{2}$. Resolent l'equació: $x = 50^{o}$.

1382.- Calculeu la proporció entre les àrees del quadrat i l'hexàgon regular d'igual perímetre.

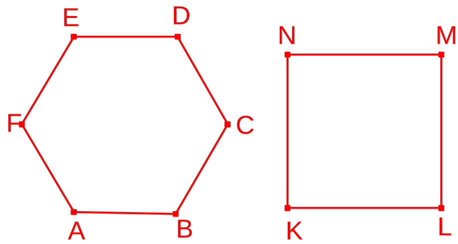


Solució:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = c$.
El seu perímetre és 6c.
Siga KLMN el quadrat de perímetre 6c.

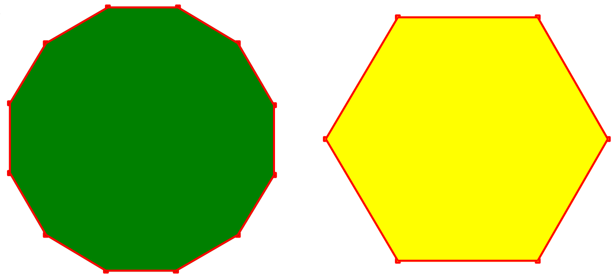
El seu costat és $\overline{KL} = \frac{6c}{4} = \frac{3c}{2}$.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual a l'àrea de sis triangles equilàters de costat c:
La proporció entre les àrees del quadrat i l'hexàgon és:



$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\left(\frac{3}{2}c\right)^2}{6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1383.- Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon regular i el dodecàgon regular d'igual perímetre.



Solució:

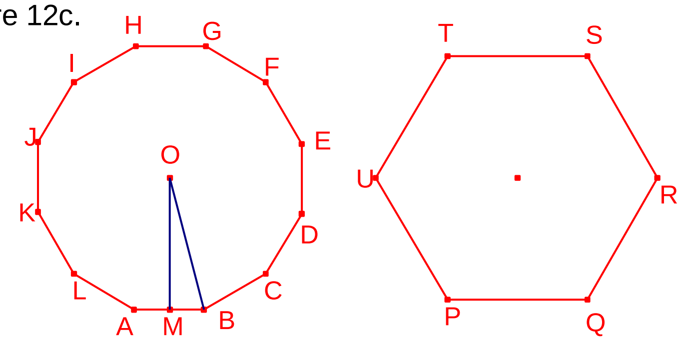
Siga el dodecàgon regular ABCDEFGHIJKL de costat $\overline{AB}=c$.

El seu perímetre és 12c.

Siga PQRSTU l'hexàgon regular de perímetre 12c.

El seu costat és $\overline{KL}=2c$.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual a l'àrea de sis triangles equilàters de costat 2c:



$$S_{PQRSTU}=6\frac{\sqrt{3}}{4}(2c)^2=6\sqrt{3}c^2$$

Siga O el centre del dodecàgon regular.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$$\overline{BM}=\frac{c}{2}$$

$$\angle AOB=\frac{360^{o}}{12}=30^{o}.$$

$$\angle ABO=75^{o}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$$\overline{OM}=\frac{c}{2}tg75^{o}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}c.$$

L'àrea del dodecàgon regular és igual a l'àrea de 12 triangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

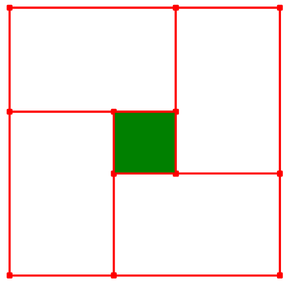
$$S_{ABCDEFGHIJKL}=12\cdot\frac{1}{2}c\frac{2+\sqrt{3}}{2}c=3\left(2+\sqrt{3}\right)c^2$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon regular i el dodecàgon regular és:

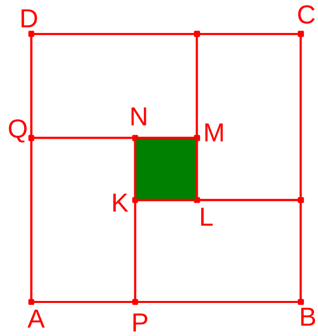
$$\frac{S_{PQRSTU}}{S_{ABCDEFGHIJKL}}=\frac{6\sqrt{3}c^2}{3\left(2+\sqrt{3}\right)c^2}=4\sqrt{3}-6.$$

1384.- Dins d'un quadrat s'han dibuixat quatre rectangles auris iguals.

Determineu la proporció entre les àrees i els perímetres del quadrat interior i el quadrat exterior.



Solució:
Siga ABCD el quadrat exterior.
Siga KLMN el quadrat interior.



Siga APNQ un dels rectangles auris, $\overline{AP}=1$, $\overline{AQ}=\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{AQ}=1+\Phi=\Phi^2$.

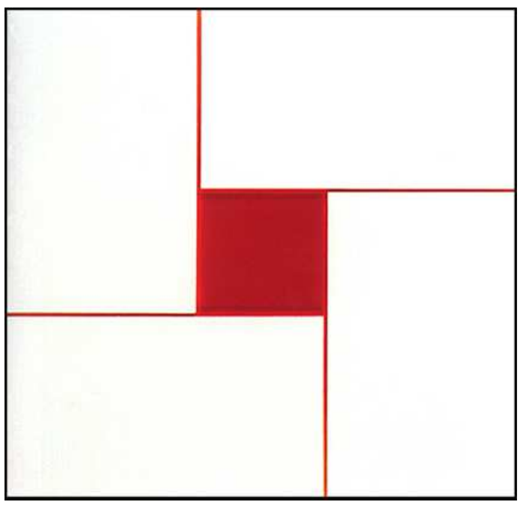
$\overline{KL}=\overline{AQ}-\overline{AP}=\Phi-1=\dfrac{1}{\Phi}$.

La proporció entre les àrees dels quadrats KLMN, ABCD és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}}=\frac{\left(\frac{1}{\Phi}\right)^2}{\left(\Phi^2\right)^2}=\frac{1}{\Phi^6}=13-8\Phi=9-4\sqrt{5}\approx 0.05573\,.$$

La proporció entre els perímetres dels quadrats KLMN, ABCD és:

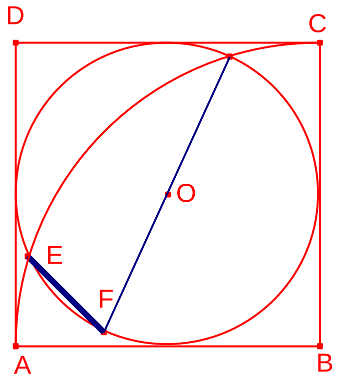
$$\frac{P_{KLMN}}{P_{ABCD}}=\frac{4\left(\frac{1}{\Phi}\right)}{4\left(\Phi^2\right)}=\frac{1}{\Phi^3}=-3+2\Phi=-2+\sqrt{5}\approx 0.2361.$$



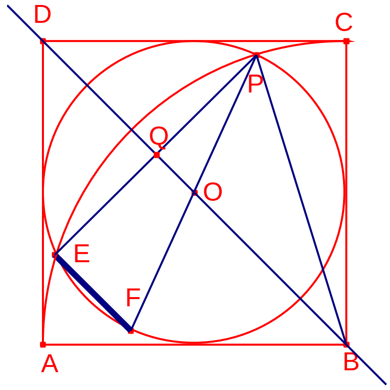
Formas, ritmo-espacio, 1966, José María Yturralde

1385.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat 16 i centre O.

Determineu la mesura del segment $\overline{EF}$.



Solució:
La circumferència de centre O té radi 8.
Siga P la intersecció de la circumferència i l'arc de centre B i radi 16.
Siga Q el punt mig del segment $\overline{EP}$.
Siga $\alpha = \angle OBP$.



$\overline{OP} = 8$, $\overline{BP} = 16$, $\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BOP}$:

$8^2 = 16^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 16 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Siga $\overline{OQ} = x$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQP}$:

$\frac{x + 8\sqrt{2}}{16} = \cos\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{8}$. Resolent l'equació:

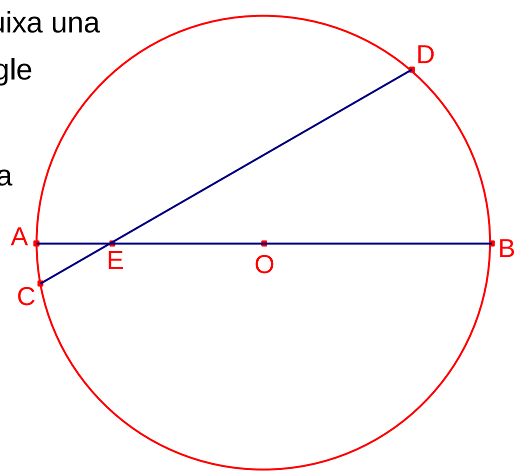
$x = 2\sqrt{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OQP}$, $\overset{\Delta}{FEP}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{EF} = 2x = 4\sqrt{2}$.

1386.- Siga la circumferència de diàmetre $\overline{AB}=6$, es dibuixa una corda $\overline{CD}$ que talla el diàmetre en el punt E i forma un angle de 30º amb aquest.

Si la distància de E al centre és 2, calculeu la mesura de la corda $\overline{CD}$.



Solució:
Aplicant la potència de E respecte de la circumferència:

$\overline{CE}\cdot\overline{DE}=\overline{OA}^2-\overline{OE}^2=3^2-2^2=5$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{EOD}$:

$3^2=2^2+\overline{DE}^2-2\cdot 2\cdot\overline{DE}\cdot\cos 30º$.

$\overline{DE}^2-2\sqrt{3}\cdot\overline{DE}-5=0$. Resolent l'equació:

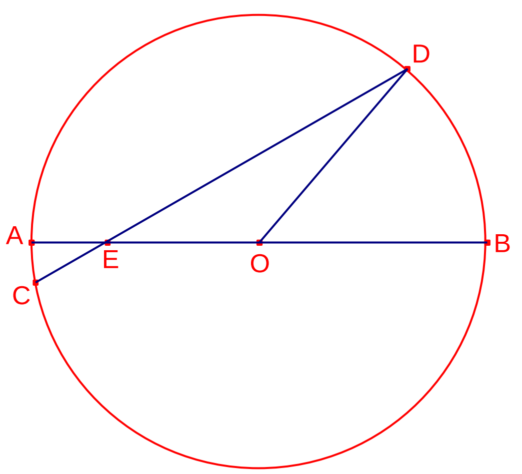
$\overline{DE}=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

$\overline{CE}\cdot\overline{DE}=5$

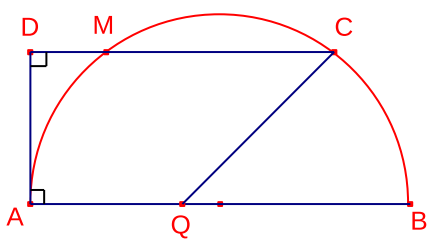
$\overline{CE}\cdot\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)=5$. Aleshores:

$\overline{DE}=-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

$\overline{CD}=\overline{DE}+\overline{CE}=4\sqrt{2}$.



1387.- En la figura, $\overline{AB}$ és diàmetre de la semicircumferència.

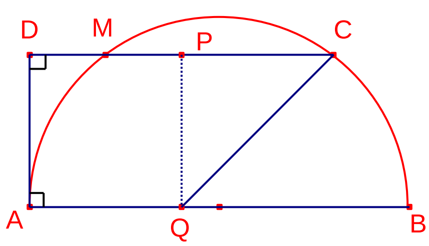


$\overline{MC}=12$, $\overline{QD}=8\sqrt{2}$, $\angle CQB=45^o$, $\angle DAB=90^o$, $\angle ADC=90^o$.

Determineu la mesura del segment $\overline{DM}$.

Solució:

Siga P la projecció de Q sobre $\overline{CD}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QPC}$:

$\overline{AD}=\overline{PQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{QC}=8$.

Aplicant la potència de D respecte de la circumferència:

$\overline{DM}\cdot\overline{DC}=\overline{AD}^2$.

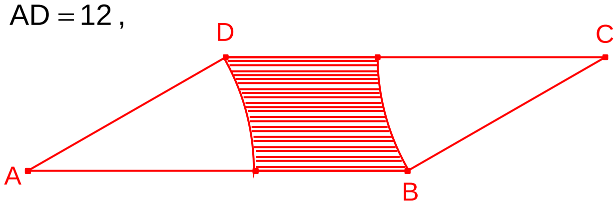
$\overline{DM}\cdot\left(\overline{DM}+\overline{MC}\right)=\overline{AD}^2$.

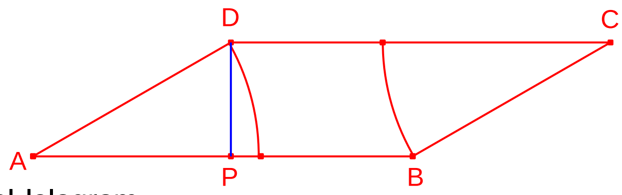
$\overline{DM}\cdot\left(\overline{DM}+12\right)=64$. Resolent l'equació:

$\overline{DM}=4$.

1388.- Donat el paral·lelogram ABCD $\overline{AB}=20$, $\overline{AD}=12$, $\angle DAB=30^o$.

s'han dibuixat dos arcs de centres A, C respectivament i radi 12.
Determineu l'àrea de la zona ratllada.





Solució:

Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.

$\overline{DP}=\frac{1}{2}\overline{AD}=6$.

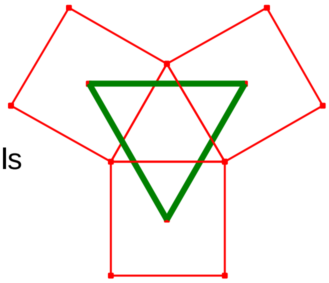
L'àrea de la zona ratllada és igual a l'àrea del paral·lelogram ABCD menys la suma de les àrees de dos sectors de 30º i radi 12.

$$S_{ratllada}=\overline{AB}\cdot\overline{DP}-2\left(\frac{1}{12}\pi\overline{AD}^2\right).$$

$$S_{ratllada}=20\cdot 6-2\left(\frac{1}{12}\pi 12^2\right)=120-24\pi\approx 44.6018$$

1389.- Sobre cadascun dels costats d'un triangle equilàter es construeixen exteriorment quadrats, els perímetres dels quals són iguals a 16.

Determineu l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els centres dels quadrats.

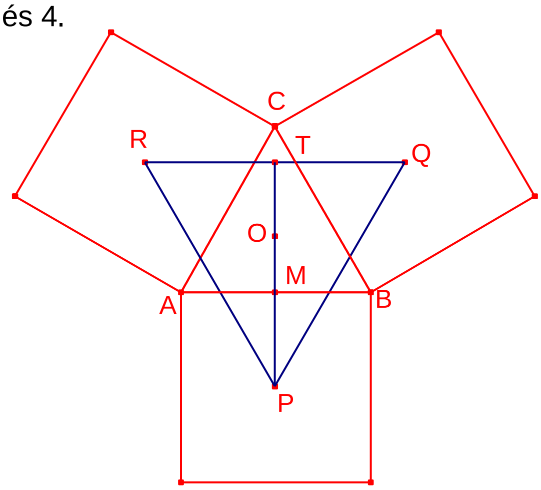


Solució:
Si el perímetre dels quadrats és 16, el costat del quadrat és 4.

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat 4.

Siga O el centre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

O és el centre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ format pels centres dels tres quadrats.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga T el punt mig del costat $\overline{QR}$.
$\overline{PM}=2$.

$\overline{OM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}4=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. $\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

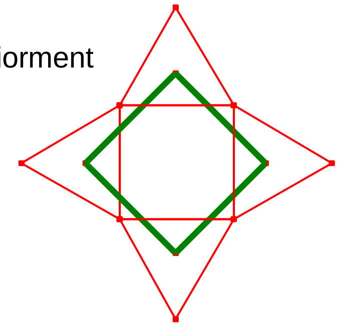
$\overline{OP}=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Els triangle equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQR}$ són semblants i la raó de semblança és

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{6+2\sqrt{3}}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

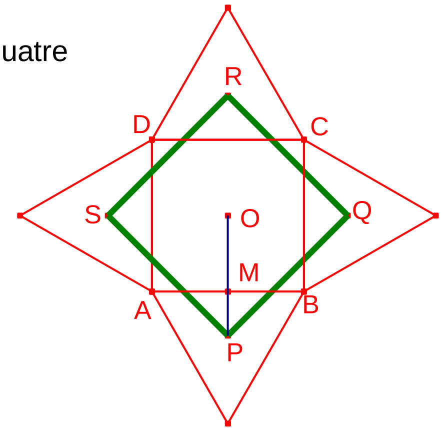
$$S_{PQR}=\left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OC}}\right)^2 S_{ABC}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}4^2=2\left(3+2\sqrt{3}\right)\approx 12.9282.$$



390.- Sobre cadascun dels costats quadrat es construeixen exteriorment triangles equilàters, els perímetres dels quals són iguals a 12.

Determineu l'àrea del quadrat els vèrtexs del qual són els baricentres dels triangles equilàters.

Solució:
Si el perímetre dels triangles equilàters és 12, el costat del triangle és 4.
Siga ABCD el quadrat de costat 4.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
O és el centre del quadrat PQRS format pels baricentres dels quatre triangles equilàters.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{OM} = 2$.

$$\overline{MP} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{OP} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{PR} = 2\overline{OP} = \frac{12+4\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea del quadrat PQRS és:

$$S_{PQRS} = \frac{1}{2}\overline{PR}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{12+4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}\left(2+\sqrt{3}\right) \approx 19.9043.$$