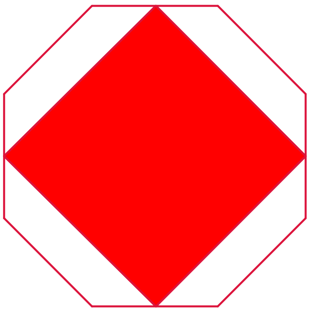
Problemes de Geometria per a l'ESO 14

131.- La següent figura està formada per un octògon regular i un quadrat. Els vèrtexs del quadrat són punts mig de costats de l'octògon.
Calculeu la proporció entre els perímetres i les àrees.

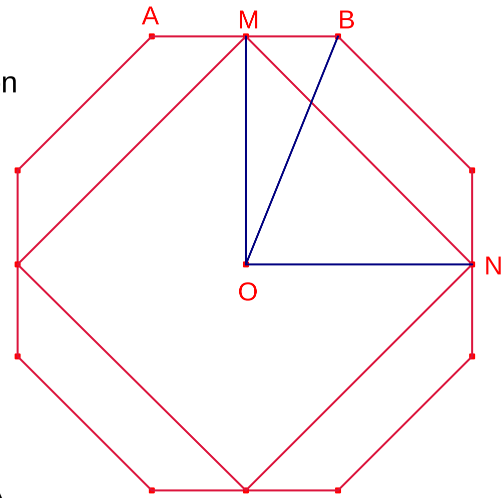


Solució:

Siga $\overline{AB} = x$ costat de l'octògon regular.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència inscrita a l'octògon regular.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$:

$\overline{MN} = r\sqrt{2}$.

Aleshores el perímetre del quadrat és:

$P_Q = 4r\sqrt{2}$.

L'àrea del quadrat és:

$S_Q = \left(r\sqrt{2}\right)^2 = 2r^2$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$\frac{x}{2r} = \text{tg}\frac{45^o}{2} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$. Aleshores:

$x = 2\sqrt{3-2\sqrt{2}}r$.

Aleshores el perímetre de l'octògon regular és:

$P_O = 8x = 16r\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

L'àrea de l'octògon regulat és:

$S_O = \frac{8xr}{2} = 8\sqrt{3-2\sqrt{2}}r^2$.

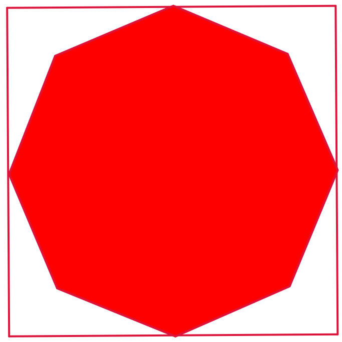
La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{P_Q}{P_O} = \frac{4r\sqrt{2}}{16r\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{2\left(3+2\sqrt{2}\right)}.$$

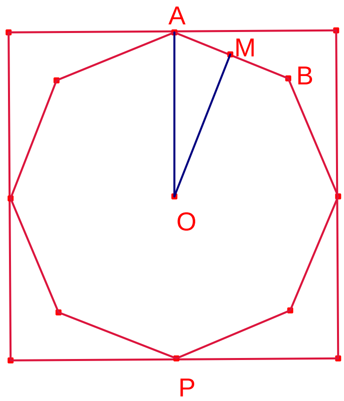
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_Q}{S_O} = \frac{2r^2}{8r^2\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

132.- La següent figura està formada per un un quadrat i octògon regular. Quatre vèrtexs de l'octògon són punts mig dels costats del quadrat.
Calculeu la proporció entre els perímetres i les àrees de les figures.



Solució:



Siga $\overline{AB} = x$ costat de l'octògon regular.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Siga $\overline{OA} = r$ radi de la circumferència inscrita al quadrat.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$:

$\overline{MN} = r\sqrt{2}$.

El costat del quadrat mesura $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{OA} = 2r$

Aleshores el perímetre del quadrat és:

$P_Q = 8r$.

L'àrea del quadrat és:

$S_Q = (2r)^2 = 4r^2$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$\frac{x}{2r} = \sin\frac{45^o}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Aleshores: $x = \sqrt{2-\sqrt{2}}r$.

$\frac{\overline{OM}}{r} = \cos\frac{45^o}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Aleshores: $\overline{OM} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}r$.

Aleshores el perímetre de l'octògon regular és:

$P_O = 8x = 8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

L'àrea de l'octògon regulat és:

$$S_O = \frac{8x \cdot \overline{OM}}{2} = \frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}r^2 = 2r^2\sqrt{2} .$$

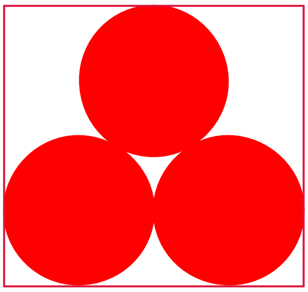
La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{P_O}{P_Q} = \frac{8r\sqrt{2-\sqrt{2}}}{8r} = \sqrt{2-\sqrt{2}} .$$

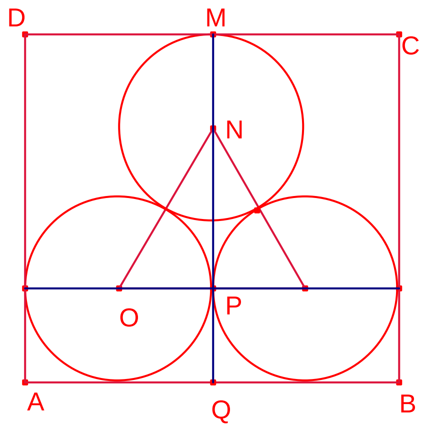
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_O}{S_Q} = \frac{2r^2\sqrt{2}}{4r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

133.- En la figura les tres circumferències són iguals i tangents i són tangents al rectangle.
Determineu la proporció entre els costats del rectangle.



Solució:
Siga r el radi de les tres circumferències.
Els centres de les tres circumferències determinen un triangle equilàter de costat 2r



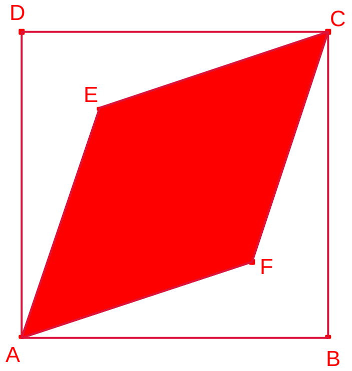
$\overline{MN} = \overline{PQ} = r$.

$\overline{ON} = 2r$. $\overline{OP}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPN}$.
$\overline{PN} = r\sqrt{3}$.
Aleshores, $\overline{BC} = \overline{MQ} = \left(2+\sqrt{3}\right)r$.

$\overline{AB} = 4r$.

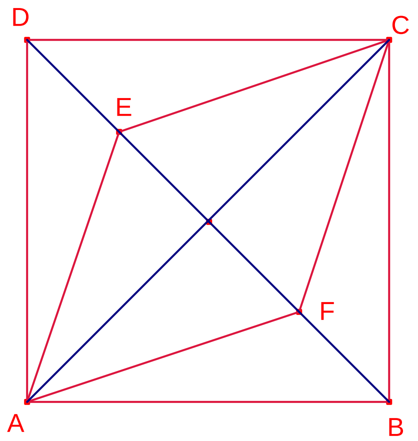
Aleshores la proporció entre els costats és:
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)r}{4r} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

134.- En la figura ABCD és un quadrat de costat c i AECF és un rombe de meitat àrea que el quadrat. Calculeu la mesura de $\overline{DE}$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.

Per ser AECF un rombe la diagonal del rombe $\overline{EF}$ és perpendicular a la diagonals $\overline{AC}$ i passa pel punt mig de $\overline{AC}$. Aleshores E, F pertanyen a la diagonal del quadrat $\overline{BD}$.



$$S_{AFE} = \frac{1}{2} S_{AECF} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Aleshores, $S_{AFE} = \frac{1}{2} S_{ABD}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEF}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{AFE}}{S_{ABD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BD}}.$$

$$\frac{S_{AFE}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2} S_{ABD}}{S_{ABD}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{EF}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$. Per tant, $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BD}$.

$$\overline{DE} = \overline{BF}.$$

$$\overline{DE} + \overline{BF} = \overline{BD} - \overline{EF} = \overline{BD} - \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BD}.$$

$$2 \cdot \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BD}.$$

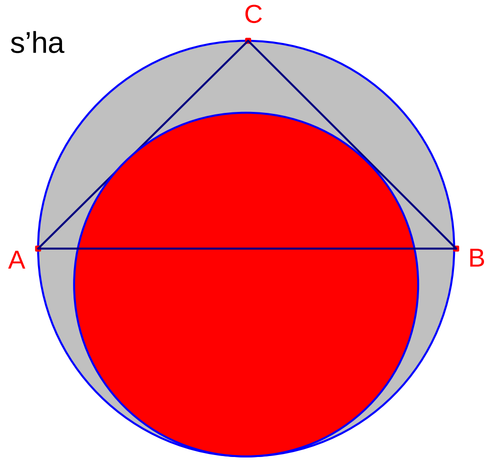
Aleshores, $\overline{DE} = \frac{1}{4}\overline{BD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{BD} = c\sqrt{2}.$$

Aleshores, $\overline{DE} = \frac{1}{4}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{4}c$.

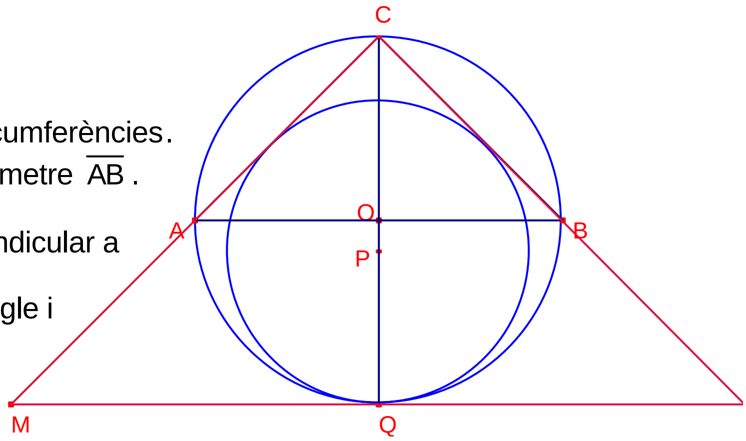
135.- Sobre una circumferència de radi R i diàmetre $\overline{AB}$ s'ha dibuixat el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ i una circumferència tangent a l'anterior i tangent als costat $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ del triangle. Calculeu el radi de la segona circumferència.



Solució:

Siga Q el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$.

Dibuixem les rectes AC, BC i la recta perpendicular a OC que passa per Q.
Les tres rectes determinen el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{CMN}$.
Siga P el centre de la segona circumferència i P el seu centre. Siga r el seu radi.



La segona circumferència està inscrita en el triangle $\overset{\Delta}{CMN}$.

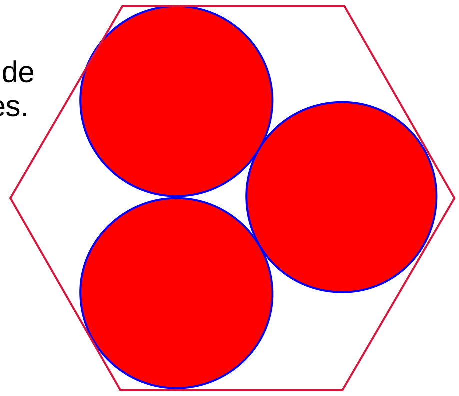
$\overline{CQ} = 2R$, $\overline{MN} = 4R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{CQN}$.
$\overline{QN} = 2R$, $\overline{CN} = 2R\sqrt{2}$.
Aplicant la propietat del radi de la circumferència inscrita a un triangle rectangle:

$$r = \frac{\overline{CN} + \overline{CM} - \overline{MN}}{2}.$$

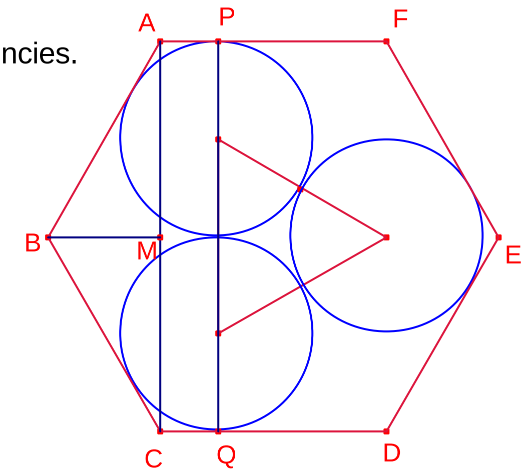
$$r = \frac{4R\sqrt{2} - 4R}{2} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)R.$$

136.- En la figura les tres circumferències són iguals, tangents dos a dos i tangents a l'hexàgon. Si el costat de l'hexàgon és c, calculeu el radi de les 3 circumferències.



Solució:

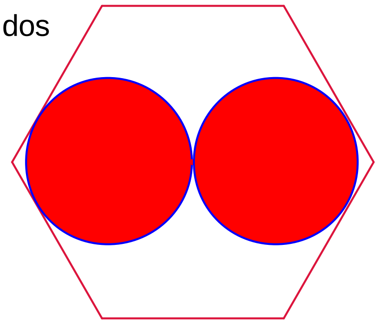
Siga l'hexàgon regular ABCDEF, de costat $\overline{AB}=c$
Siguen P i Q punts de tangències de dues circumferències.
Siga $\overline{OP}=R$ radi de les tres circumferències.
$\overline{PQ}=\overline{AC}=4R$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AC}$.
El triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és rectangle $M=90^o$, $B=60^o$.



Aleshores, $\overline{BM}=\frac{c}{2}$. $\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}c=2R$.

Aleshores, $R=\frac{\sqrt{3}}{4}c$.

137.- En la figura les dues circumferències són iguals, tangents dos a dos i tangents a l'hexàgon. Si el costat de l'hexàgon és c, calculeu el radi de les 2 circumferències



Solució:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF, de costat $\overline{AB} = c$ i de centre O

Siga r la recta mediatriu del costat $\overline{AF}$.

Les rectes AB, BC tallen la recta r en les punts P, Q, respectivament.

Notem que la circumferència de centre S és inscrita al triangle isòsceles $P\overset{\Delta}{B}Q$.

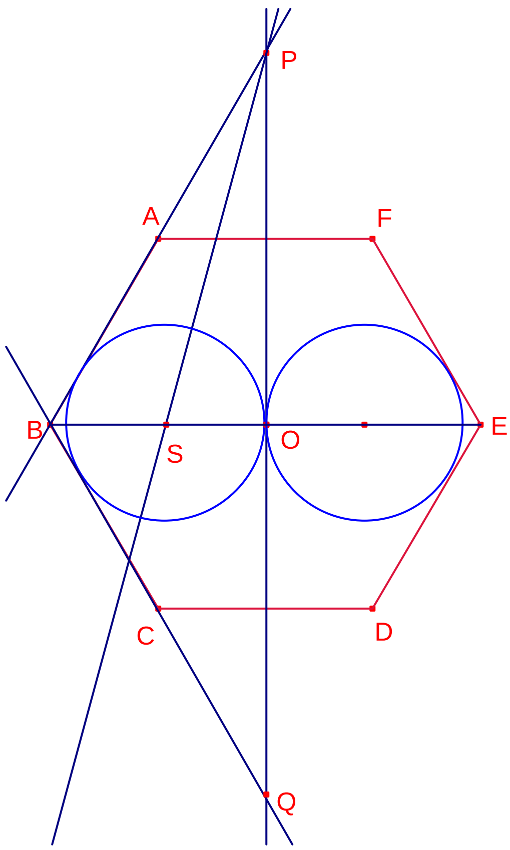
$\angle BPO = 30^o$, $\overline{OB} = \overline{AB} = c$.

Aleshores, $\overline{PB} = 2c$. $\overline{PO} = c\sqrt{3}$.

Aleshores la recta PS és bisectriu del triangle $P\overset{\Delta}{B}Q$.

$\angle SPO = 15^o$.

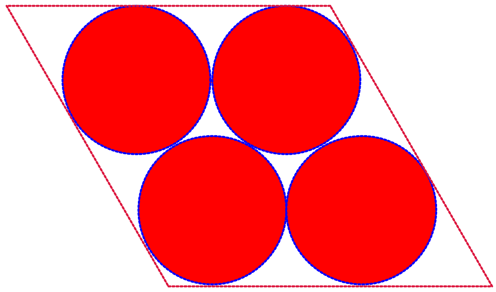
Siga $\overline{SO} = R$ radi de les dues circumferències.



$$tg15^o = \frac{\overline{SO}}{\overline{PO}} = \frac{R}{c\sqrt{3}}.$$

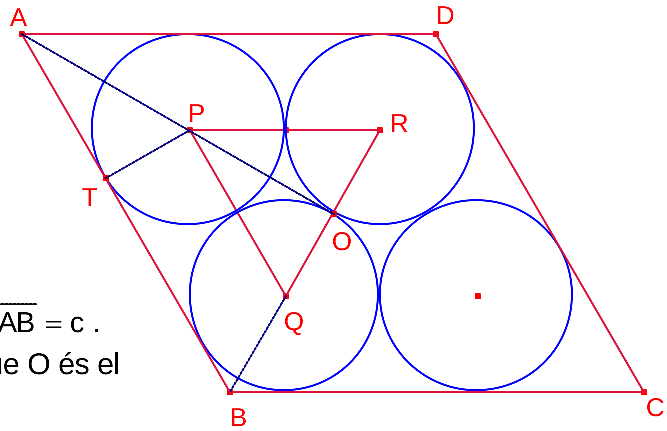
$$R = c\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{3}-3\right)c.$$

138.- En la figura el costat del rombe és c. Calculeu el radi de les quatre circumferències tangents i iguals.



Solució:

Siga ABCD un rombe de costat $\overline{AB} = c$.
Siga r el radi de les quatre circumferències.
Els centres P, Q, R de les circumferències formen un triangle equilàter.
Per ser els costats del rombe tangents a les circumferències d'igual radi tenim que $\overline{AB}$ és paral·lel a $\overline{PQ}$, $\overline{AD}$ és paral·lel a $\overline{PR}$.
Aleshores l'angle $\angle BAD = 60^{o}$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és equilàter, $\overline{BD} = \overline{AB} = c$.
Siga O el punt mig del segment $\overline{AD}$. Notem que O és el punt mig del segment $\overline{QR}$.



$\overline{PQ} = 2r$, $\overline{OQ} = r$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POQ}$:
$\overline{OP} = r\sqrt{3}$.

Siga T punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AB}$.
$\angle PAT = 30^{o}$, $\overline{PT} = r$.
Aleshores, $\overline{AP} = 2r$.

$\overline{AB} = c$, $\overline{BO} = \dfrac{c}{2}$, $\overline{OA} = \overline{AP} + \overline{OP} = (2 + \sqrt{2} = r$.

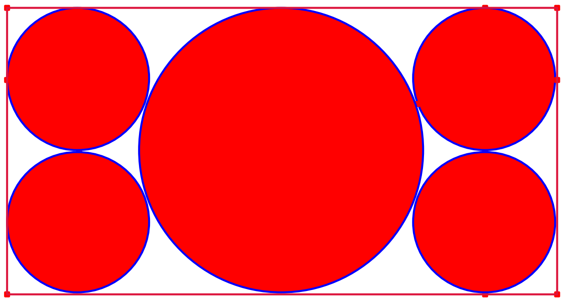
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

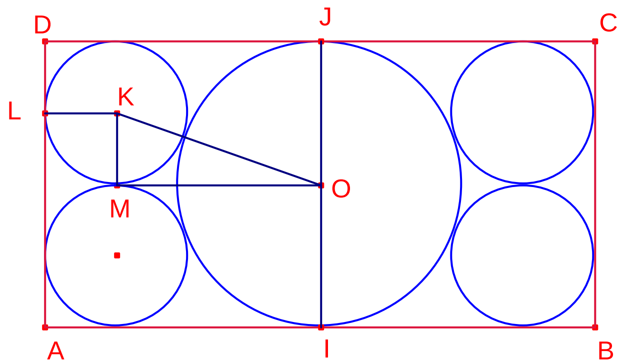
$$c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left((2+\sqrt{3})r\right)^2.$$

$\left(7 + 4\sqrt{3}\right)r^2 = \dfrac{3}{4}c^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \frac{\sqrt{3(7-4\sqrt{3})}}{2}c.$$

139.- En la figura les circumferències menudes són iguals i les cinc son tangents i tangents als costats.
Calculeu la proporció entre els costats del rectangle exterior.





Solució:
Siga r el radi de les quatre circumferències menudes.

$\overline{AD} = 4r$

$\overline{OI} = 2r$ radi de la circumferència gran de centre O.

$\overline{OK} = r + 2r = 3r$.

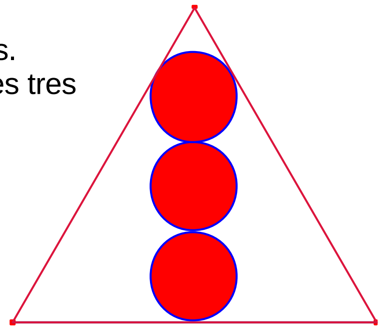
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNO}$:

$\overline{OM} = 2r\sqrt{2}$.

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AI} = 2\left(\overline{KL} + \overline{OM}\right) = 2\left(r + 2r\sqrt{2}\right) = \left(2 + 4\sqrt{2}\right)r .$$

La proporció entre els costats és:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\left(2+4\sqrt{2}\right)r}{4r} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2} .$$



140.- En la figura les circumferències són iguals i tangents.
Si el costat del triangle equilàter és c calculeu el radi de les tres circumferències.

Solució:

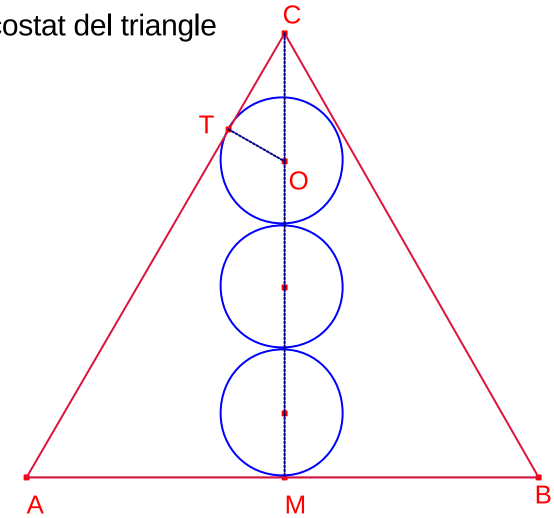
Siga $\overline{AB} = c$ costat del triangle equilàter.

Siga r el radi de les 3 circumferències.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga O el centre de la circumferència superior.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat del triangle equilàter.



$\overline{OM} = 5r$.

$\overline{OT} = r$.

$\overline{OC} = 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$\overline{CM} = \overline{OM} + \overline{OC} = 7r$.

$7r = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{\sqrt{3}}{14}c$.