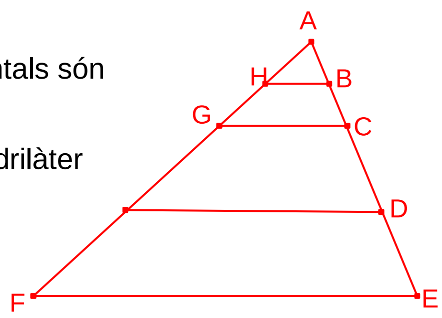
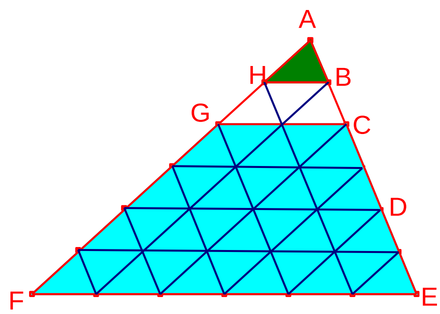
Problemes de Geometria per a l'ESO 140

1391.- En la figura, $2 \cdot \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ i les rectes horitzontals són paral·leles.

Calculeu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABH}$ i el quadrilàter FGCE.



Solució 1:



$$\frac{S_{ABH}}{S_{FGCE}} = \frac{1}{32}.$$

Solució 2:

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABH}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABH}$, $\overset{\Delta}{ACG}$ són semblants i de raó 1:2.

$S_{ACG} = 2^2 S = 4S.$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABH}$, $\overset{\Delta}{AEF}$ són semblants i de raó 1:6.

$S_{AEF} = 6^2 S = 36S.$

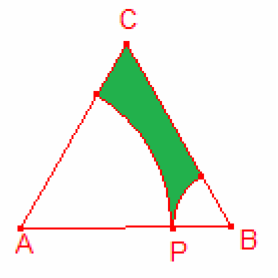
L'àrea del quadrilàter FGCE és igua a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACG}$.

$S_{FGCE} = S_{AEF} - S_{ACG} = 32S.$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABH}$ i el quadrilàter FGCE és:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{FGCE}} = \frac{S}{32S} = \frac{1}{32}.$$

1392.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle equilàter de costat c.
Dos arcs tangents de centres A i B en el punt P.
Calculeu el perímetre de la zona ombrejada.



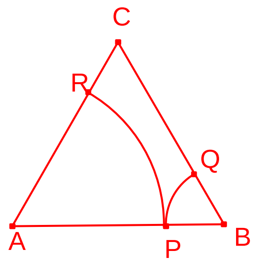
Solució:

Siga $x = \overline{AP} = \overline{AR}$.

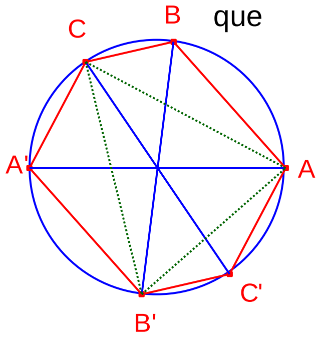
$\overline{PB} = \overline{CR} = c - x$, $\overline{QC} = x$.

El perímetre és igual a la suma de dos arcs de 60º i radis, $x, c - x$, respectivament, i els segments $\overline{CR}$, $\overline{QC}$.

$$P = \frac{1}{6}(2\pi x) + \frac{1}{6}(2\pi(c - x)) + x + (c - x) = c + \frac{\pi}{3}c.$$



1393.- L'hexàgon ABCA'B'C' està inscrit en una circumferència tal que $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ són diàmetres de la circumferència i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACB'}$ és 1.
Determineu l'àrea de l'hexàgon ABCA'B'C'.



Solució:
Siga O en centre de la circumferència, intersecció de les diagonals.
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$, $\overset{\Delta}{A'OB'}$ són iguals.
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{COB}$, $\overset{\Delta}{C'OB'}$ són iguals.
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{A'OC}$, $\overset{\Delta}{AOC'}$ són iguals.
L'àrea de l'hexàgon ABCA'B'C' és:
$S_{A'BCA'B'C'} = 2(S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC'})$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACB'}$ és:
$S_{A'C'B'} = S_{AOC} + S_{COB'} + S_{AOB'} = 1$.

Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea:
$S_{AOC} = S_{AOC'}$
$S_{COB'} = S_{BOC}$.
$S_{AOB'} = S_{AOB}$.

Sumant les tres expressions:
$S_{A'C'B'} = S_{AOC'} + S_{BOC} + S_{AOB} = 1$.
Aleshores:
$S_{A'BCA'B'C'} = 2(S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC'}) = 2 \cdot 1 = 2$.

1394.- Quants triangles hi ha amb els costats naturals, tal que un costat és el triple que un altre i un tercer costat mesura 15?. Indiqueu els costats de tots els triangles que acompleixen la condició.

Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $a = x, b = 3x, c = 15$, $x \in N$. Notem que el costat b és el triple que el costat a.

En un triangle dos costats sumen més que el tercer:

$\begin{cases} x + 3x > 15 \\ x + 15 > 3x \end{cases}$. Resolent el sistema d'inequacions:

$\begin{cases} x < \dfrac{15}{4} \\ x < \dfrac{15}{2} \end{cases}$, com que $x \in N$, aleshores:

$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 7 \end{cases}$.

El nombre de triangle que acompleixen la condició són 4.

Els costats dels quatre triangles són:

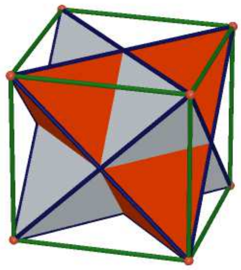
a) Si $x = 4$, $a = 4, b = 12\ c = 15$.

b) Si $x = 5$, $a = 5, b = 15\ c = 15$.

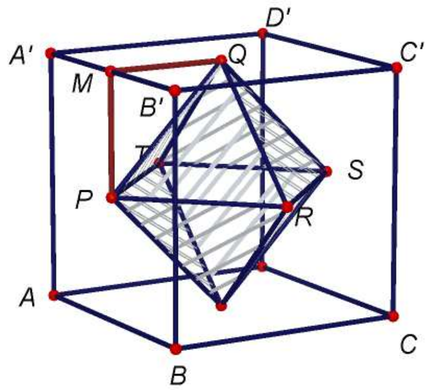
c) Si $x = 6$, $a = 6, b = 18\ c = 15$.

d) Si $x = 7$, $a = 7, b = 21\ c = 15$.

1395.- Calculeu el volum de la intersecció dels dos tetraedres regulars inscrits en un cub d'aresta 1.



Solució 1:
Els dos tetraedres regulars s'intersecten en els punts migs de les cares i formen un octaedre regular.
L'octaedre dual del cub.

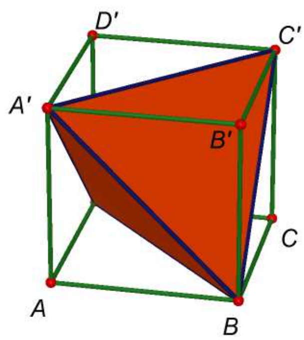


Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $a=\overline{AB}$.
Siga P el centre de la cara ABB'A'.
Siga Q el centre de la cara A'B'C'D'.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{A'B'}$. $\overline{PM}=\overline{QM}=\frac{a}{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PMQ}$: $\overline{PQ}=\sqrt{2}\frac{a}{2}$.
El volum de l'octaedre és igual a doble del volum de la piràmide de base quadrangular PRST i vèrtex Q.
Notem que la seua altura és la meitat de l'aresta del cub.

$$V_{oct}=2\left(\frac{1}{3}\overline{PR}^2\cdot\frac{a}{2}\right).\quad V_{oct}=2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{6}a^3.$$

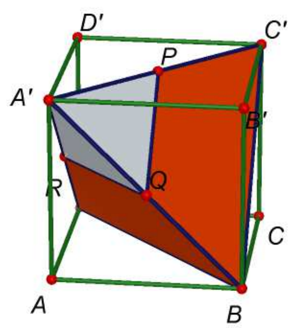
La proporció entre els volums de l'octaedre regular i el cub és:

$$\frac{V_{oct}}{V_{cub}}=\frac{\frac{1}{6}a^3}{a^3}=\frac{1}{6}.$$



Solució 2:
Siga V el volum del cub.
El volum del tetraedre A'BC'B' és igual a la $\frac{1}{6}$ part del cub.
El volum del tetraedre regular A'BC'D és igual al volum del cub menys el volum de quatre tetraedres A'BC'B':

$$V_{A'BC'D}=V-4\frac{1}{6}V=\frac{1}{3}V$$



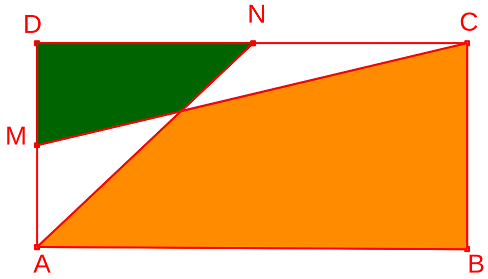
El volum del tetraedre regular A'PQR és igual la $\frac{1}{8}$ part del tetraedre regular A'BC'D.

$$V_{A'PQR}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}V\right)=\frac{1}{24}V.$$

El volum de la intersecció dels dos tetraedres regulars és igual al volum del tetraedre regular A'BC'D menys el volum de quatre tetraedres A'PQR:

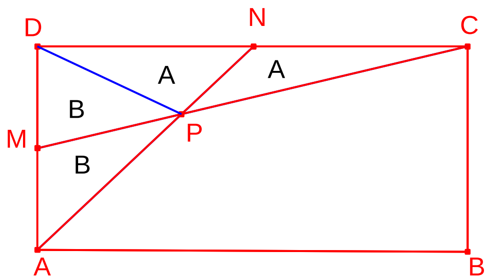
$$V_{Octaedre}=\frac{1}{3}V-4\left(\frac{1}{24}V\right)=\frac{1}{6}V.$$

1396.- Siga ABCD un rectangle.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga P la intersecció dels segments $\overline{AN}$, $\overline{CM}$.
Calculeu la proporció entre les àrees dels quadrilàters MPND, ABCP.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea.



Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DNP}$, $\overset{\Delta}{CNP}$ són iguals.
Siga $A = S_{DNP} = S_{CNP}$.
Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DMP}$, $\overset{\Delta}{AMP}$ són iguals.
Siga $B = S_{DMP} = S_{AMP}$.

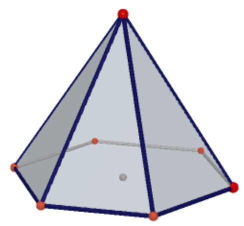
$S_{DNA} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. $S_{DNA} = A + 2B$.

$S_{CDM} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$. $S_{CDM} = 2A + B$.

Aleshores, $A + 2B = 2A + B$. Simplificant:
$A = B$.
Aleshores, $S_{DNA} = A + 2B = 3A$.
$S_{ABCN} = 3 \cdot S_{ADN}$
$S_{ABCN} = 3 \cdot 3A = 9A$.
$S_{ABCP} = S_{ABCN} - A = 9A - A = 8A$.
$S_{MPND} = A + B = 2A$
La proporció entre les àrees dels quadrilàters MPND, ABCP és:

$$\frac{S_{MPND}}{S_{ABCP}} = \frac{2A}{8A} = \frac{1}{4}.$$

1397.- En una piràmide regular hexagonal l'àrea lateral és igual al doble de l'àrea de la base.



a) Calculeu la proporció entre l'altura de la piràmide i l'aresta de la base.
b) Si l'aresta de la base és a, calculeu el volum de la piràmide.

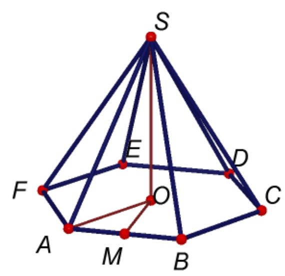
Solució:
Siga ABCDEFS la piràmide recta de base l'hexàgon regular ABCDEF.
Siga $\overline{AB} = a$, aresta de la base.
Siga O el centre de l'hexàgon regular ABCDEF.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
L'àrea de la base és igual a l'àrea de 6 triangles equilàters de costat a:

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 .$$

L'àrea lateral de la piràmide és igual al doble de l'àrea de la base:

$$S_L = 3\sqrt{3}\,a^2 .$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$ és igual a la sisena part de l'àrea lateral:



$$S_{ABS} == \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{1}{2}a\cdot\overline{MS} .$$

$$\overline{MS} = a\sqrt{3} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{AS} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{OS} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}a\right)^2 - a^2} = \frac{3}{2}a .$$

La proporció entre l'altura de la piràmide i l'aresta de la base és:

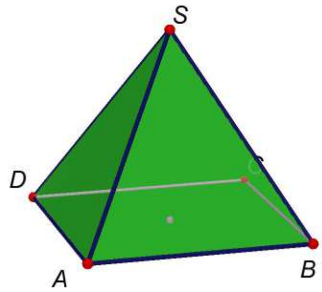
$$\frac{\overline{OS}}{a} = \frac{3}{2} .$$

El volum de la piràmide és:

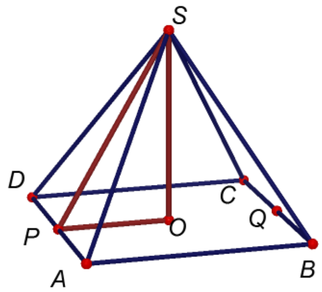
$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\right)\frac{3}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^3 .$$

1398.- Una piràmide regular quadrangular la seua àrea total és 108cm^2, les cares laterals formen 60º amb la base.

Determineu el seu volum.



Solució:
Siga la piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD, $\overline{AB} = a$.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siguen P, Q els punts migs de les arestes $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivament.
$\angle SPO = \angle SQO = 60º$.



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PQS}$ és equilàter:
$\overline{PQ} = \overline{PS} = \overline{QS} = \overline{AB} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{POS}$:

$\overline{OS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

L'àrea total del prisma és:

$S_{ABCDE} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ADS} = 108$.

$a^2 + 4\left(\frac{1}{2}a \cdot a\right) = 108$.

$3a^2 = 108$. Resolent l'equació:

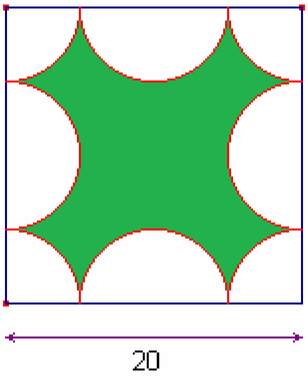
$a = 6$.

El volum de la piràmide és:

$V_{ABCDE} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \overline{OS} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}a = 36\sqrt{3}$.

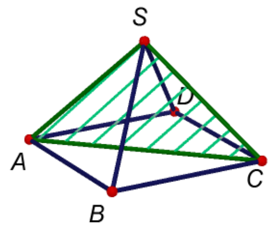
1399.- En un quadrat de costat 20 s’han dibuixar 4 semicercles i 4 quadrants d’igual radi.

Calculeu el perímetre i l’àrea de la zona ombrejada.



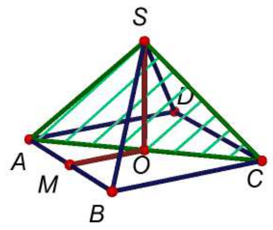
Solució:
El radi dels vuit arcs és 5.
El perímetre de la zona ombrejada és equivalent a 3 circumferències de radi 5.
$P = 3(2\pi \cdot 5) = 30\pi \approx 94.25$.
L’àrea de la zona ombrejada és equivalent a l’àrea del quadrat de costat 20 menys l’àrea de 3 cercles de radi 5.
$S = 20^2 - 3(\pi \cdot 5^2) = 400 - 75\pi \approx 164.38$.

1400.- Una piràmide regular quadrangular té altura 8cm i àrea lateral $240cm^2$.



Calculeu el seu volum i l'àrea de la secció diagonal (la que passa per la cúspide i per una diagonal de la base).

Solució:
Siga ABCDS la piràmide recta de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.
Siga O el centre del quadrat ABCD. $\overline{OS} = 8$ altura de a piràmide.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



$\overline{OM} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$\overline{MS} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{256 + a^2}\ .$$

L'àrea lateral de la piràmide és:

$$S_L = 4 \cdot S_{ABS} = 4\left(\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{MS}\right)$$

$4\left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{256 + a^2}\right) = 240$. Simplificant:

$a^4 + 256a^2 - 57600 = 0$. Resolent l'equació:
$a = 12$.
El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}12^2 \cdot 8 = 384cm^2.$$

La secció diagonal és el triangle $\overset{\Delta}{ACS}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACS}$ és:

$$S_{ACS} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{OS} = \frac{1}{2}12\sqrt{2} \cdot 8 = 48\sqrt{2} \approx 67.88cm^2.$$