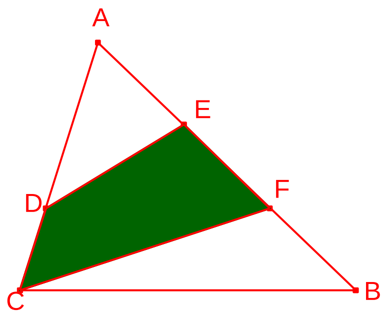
Problemes de Geometria per a l'ESO 141



1401.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

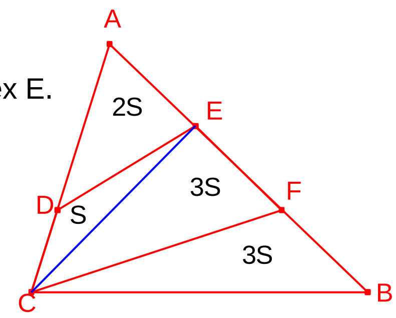
Siga D del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{CD} = \frac{1}{3}\overline{AC}$.

Siguen E i F punts del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AE} = \overline{BF} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter CDEF i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Dos triangles que tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases.



Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{DAE}$ tenen la mateixa altura traçada al vèrtex E.

$S_{DAE} = \frac{\overline{DA}}{\overline{CD}} S_{CDE} = 2S$.

$S_{CAE} = 3S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{CEF}$, $\overset{\Delta}{CFB}$ tenen la mateixa base i altura traçada al vèrtex C.

$S_{CEF} = S_{CFB} = S_{CAE} = 3S$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = 9S$.

L'àrea del quadrilàter CDEF és:

$S_{CDEF} = 4S$.

La proporció entre l'àrea del quadrilàter CDEF i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$\frac{S_{CDEF}}{S_{ABC}} = \frac{4S}{9S} = \frac{4}{9}$.

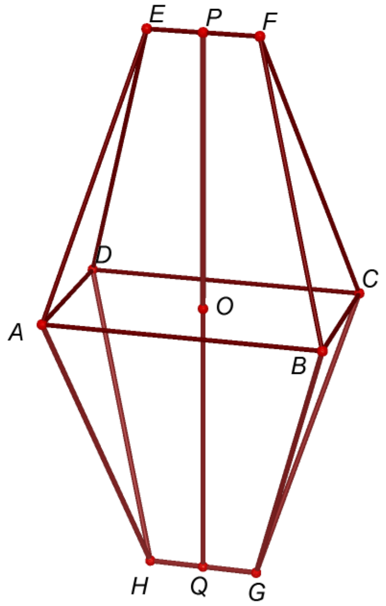
1402.- En el políedre convex de la figura, ABCD és un rectangle de centre O i de costats $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=6$.

L'aresta $\overline{EF}=4$ i és paral·lela a l'aresta $\overline{AB}$.

P, Q són els punts migs de les arestes $\overline{EF}$, $\overline{HG}$, respectivament.

$\overline{OP}=\overline{OQ}$ és perpendicular al rectangle ABCD.

Calculeu l'àrea i el volum del políedre EFABCDHG.



Solució:

Considerem el políedre EFABCD que té la meitat del volum que el políedre EFABCDHG.

Siga E' la projecció de E sobre el rectangle ABCD.

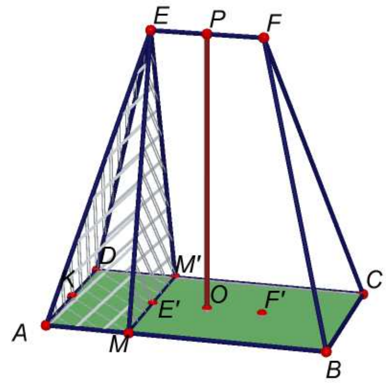
Siga F' la projecció de F sobre el rectangle ABCD.

La secció del políedre perpendicular al rectangle ABCD que passa per E talla les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ en els punts M, M', respectivament.

La secció del políedre perpendicular al rectangle ABCD que passa per F talla les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ en els punts N, N', respectivament.

$\overline{MN}=\overline{EF}=4$, $\overline{AM}=\overline{BN}=\dfrac{\overline{AB}-\overline{MN}}{2}=3$.

Siga K el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KE'E}$:

$\overline{KE}=\sqrt{109}$.

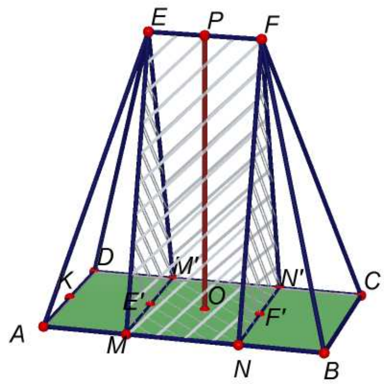
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKE}$:

$\overline{AE}=\sqrt{118}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$\overline{EM}=\sqrt{109}$.

El volum del políedre EFABCD és igual a dues vegades el volum de la piràmide quadrangular AMM'DE més el volum del prisma triangular MM'ENN'F:



$$V_{ABCDEFF}=2\left(\frac{1}{3}S_{AMM'D}\cdot\overline{EE'}\right)+S_{MM'E}\cdot\overline{EF}.$$

$$V_{ABCDEFF}=2\left(\frac{1}{3}3\cdot 6\cdot 10\right)+\frac{1}{2}6\cdot 10\cdot 4=240.$$

El volum del políedre EFABCDHG és:

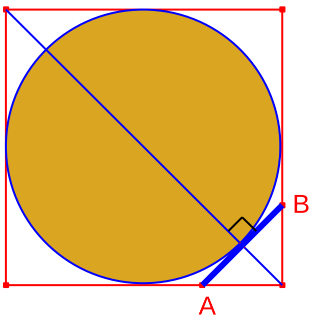
$V_{EFABCDEHG}=2V_{ABCDEF}=2\cdot 240=480$.

L'àrea del políedre EFABCDHG és igual a la suma de les àrees de quatre trapezis ABFE, més quatre triangles $\overset{\Delta}{ADE}$:

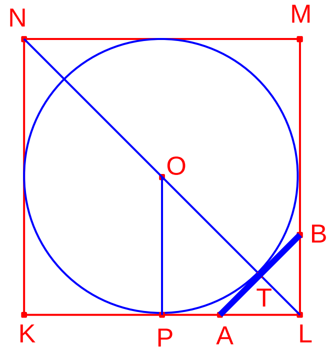
$$S_{EFABCDEHG}=4\left(\frac{\overline{AB}+\overline{EF}}{2}\cdot\overline{EM}\right)+4\left(\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{KE}\right).$$

$$S_{EFABCDEHG}=4\left(\frac{10+4}{2}\cdot\sqrt{109}\right)+4\left(\frac{1}{2}6\cdot\sqrt{109}\right)=40\sqrt{109}.$$

1403.- Determineu la longitud del segment $\overline{AB}$ tangent al cercle inscrit en el quadrat de costat 1 i perpendicular a la diagonal.



Solució:
Siga KLMN el quadrat de costat 1.
Siga O el centre de la circumferència inscrita al quadrat KLMN.
Siga P el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{KL}$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el segment $\overline{AB}$.
T és el punt mig del segment $\overline{AB}$.



$\overline{OP} = \overline{OT} = \frac{1}{2}$.

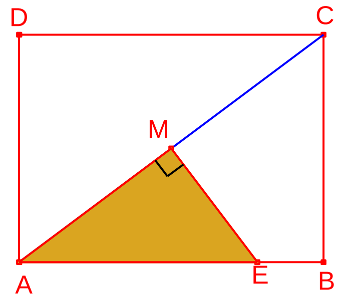
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$\overline{NL} = \sqrt{2}$.

$\overline{OL} = \frac{1}{2}\overline{NL} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{TL} = \overline{AT} = \overline{OL} - \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AT} = \sqrt{2} - 1$.



1404.- Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$.

Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.
Siga E del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC}$ i $\overline{ME}$ són perpendiculars.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AME}$.

Solució:

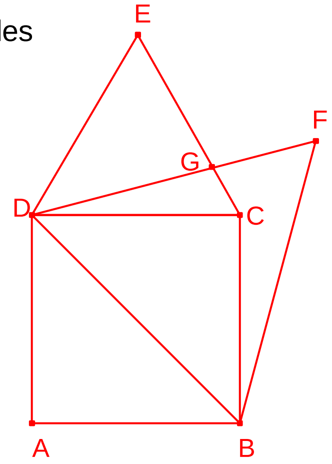
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = 10$.
$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 5$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AME}$ són semblants.
Les seues àrees són proporcionals al quadrat de la proporció dels costats.
$$\frac{S_{AME}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}\right)^2.$$
$$S_{AME} = \left(\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}\right)^2 S_{ABC} = \left(\frac{5}{8}\right)^2 24 = \frac{75}{8}.$$

1405.- Donat el quadrat ABCD de costat c, s`han dibuixat els triangles equilàters $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{BDF}$ (veure figura). Els dos triangles equilàters es tallen en el punt G.

Determineu la mesura del segment $\overline{EF}$ i la mesura de l'angle $\alpha = \angle EGF$.



Solució:
El gir de centre D i angle de 60º transforma el punt C en E i el punt B en F.

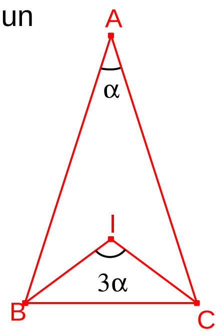
Aleshores, transforma el triangle $\overset{\Delta}{DBC}$ en el triangle $\overset{\Delta}{CFE}$, aleshores:

$\overline{CB} = \overline{EF} = c$, $\angle EDF = \angle CDB = 45^{\circ}$.

$\alpha = \angle EGF = \angle EDG + \angle DEG = 45^{\circ} + 60^{\circ} = 105^{\circ}$

1406.- En un triangle isòsceles les bisectrius dels angles iguals es tallen en un angle obtús que és triple que l'angle desigual.

Determineu la mesura de l'angle desigual del triangle.



Solució:

Siga $\alpha = \angle BAC$ angle desigual del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga I l'incentre, intersecció de les bisectrius.
Siga $\angle BIC = 3\alpha$.

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^o - \alpha}{2}.$$

$$\angle IBC = \angle ICB == \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{180^o - \alpha}{4}.$$

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{BCI}$ és 180º:

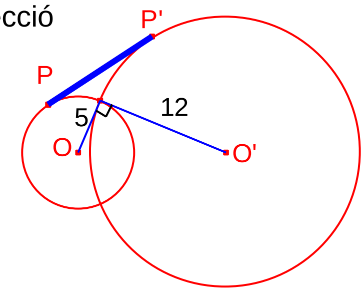
$$\frac{180^o - \alpha}{4} + \frac{180^o - \alpha}{4} + 3\alpha = 180^o.$$

Resolent l'equació:

$\alpha = 36^o$.

1407.- Els centres de dues circumferències i un punt d'intersecció formen un triangle de catets 5 i 12.

Determineu la longitud de la tangent comuna $\overline{PP'}$ a les dues circumferències.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKO'}$:

$\overline{OO'} = 13$.

Siga $\overline{PP'} = x$.

Els segments $\overline{OP}$, $\overline{O'P'}$ són perpendicular a la tangent $\overline{PP'}$.

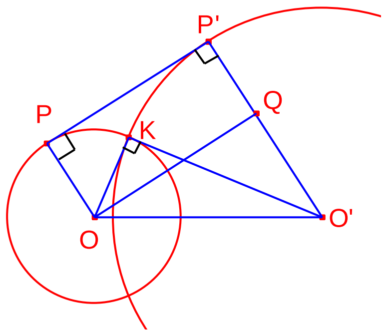
Siga Q la projecció de O sobre el segment $\overline{O'P'}$.

$\overline{OQ} = \overline{PP'} = x$.

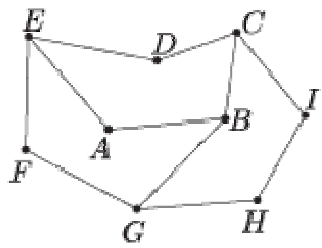
$\overline{QO'} = \overline{O'P'} - \overline{P'Q} = 12 - 5 = 7$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQO'}$:

$x = \sqrt{13^2 - 7^2} = 2\sqrt{30} \approx 10.95$.



1408.- El pentàgon ABCDE s'obté amb un gir del pentàgon HICBG al voltant del vèrtex C.

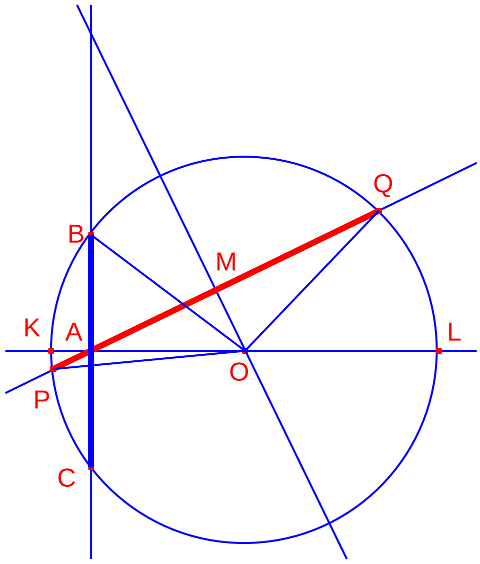


El pentàgon FGBAE s'obté amb un gir del pentàgon ABCDE al voltant del vèrtex E.
Determineu la suma de les longituds de tots els segments que formen la figura.
KöMaL C1240. Setembre 2014.

Solució:
Els pentàgons ABCDE. HICBG i FGBAE són iguals perquè es construeixen amb girs.
$\overline{BC} = \overline{IC} = \overline{GB}$.
$\overline{ED} = \overline{GB} = \overline{EA}$.
$\overline{DC} = \overline{BC} = \overline{AB}$.
Aleshores, $\overline{BC} = \overline{ED} = \overline{EA} = \overline{DC} = \overline{AB}$.
Per tant, els costats de cadascun dels pentàgons són iguals.
$\overline{BC} = \overline{ED} = \overline{EA} = \overline{DC} = \overline{AB} = 7$.
La figura consta d'11 segments iguals a 7.
Aleshores, la suma de les longituds de tots els segments de la figura és 77.

1409.- Siga A un punt del diàmetre d'una circumferència de radi 30.

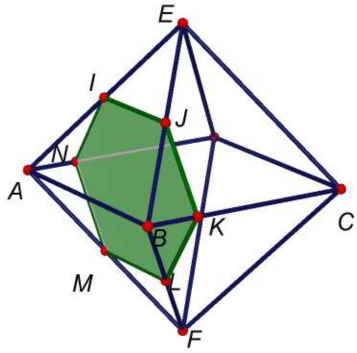
Una corda perpendicular al diàmetre en el punt A mesura 18.
Quantes cordes que passen per A tenen longitud entera.
KöMaL, K421. Setembre 2014.



Solució 1:
Siga $r = 30$ radi de la circumferència de centre O.
Siga A que pertany al diàmetre $\overline{KL}$.
Siga $\overline{BC} = 18$ corda perpendicular al diàmetre $\overline{KL}$.
Siga $\overline{PQ}$ una corda que passa per A.
Una corda és menor o igual que el diàmetre:
$\overline{PQ} \le \overline{KL} = 60$.
Suposem $\overline{AQ} \ge \overline{AP}$. Siga M el punt mig de la corda $\overline{PQ}$.
La mediatriu de les cordes d'una circumferència passen pel centre de la circumferència.
Notem que $\angle MPO = \angle MQO$.
Aleshores, $\angle BOA = \angle MQO$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOA}, \overset{\Delta}{MQO}$ tenen la mateixa hipotenusa i $\angle BOA \le \angle MQO$, aleshores: $\overline{AB} \le \overline{MQ}$. Multiplicant per 2:
$18 = \overline{BC} \le \overline{PQ}$, aleshores:
$18 \le \overline{PQ} \le 60$.
El nombre de cordes amb mesura natural és:
$n = 60 - 18 + 1 = 43$.

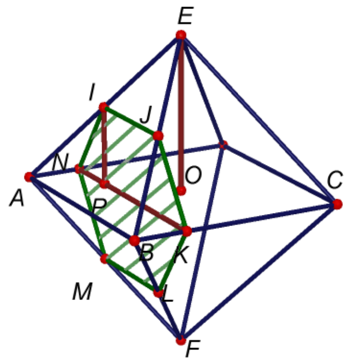
Solució 2:
Siga A que pertany al diàmetre $\overline{KL}$.
Siga $\overline{BC} = 18$ corda perpendicular al diàmetre $\overline{KL}$.
Siga $\overline{PQ} = d$ una corda que passa per A.
Una corda és menor o igual que el diàmetre:
$d = \overline{PQ} \le \overline{KL} = 60$.
Siga $x = \overline{AP}, \overline{AQ} = d - x$.
Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:
$\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$
$x(d - x) = 9 \cdot 9$.
$x^2 - dx + 81 = 0$.
A fi que aquesta equació tinga solució el seu discriminant ha de ser major o igual que zero:
$d^2 - 4 \cdot 81 \ge 0, d \ge 0$. Resolent el sistema:
$d \ge 18$.
$18 \le \overline{PQ} \le 60$.
El nombre de cordes amb mesura natural és:
$n = 60 - 18 + 1 = 43$.

1410.- Siga l'octaedre regular ABCDEF d'aresta a.



Siguen I, J, L els punts migs de les arestes $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$, respectivament.
La secció que formen els punts I, J, L és l'hexàgon IJKLMN.
Determineu l'àrea de l'hexàgon IJKLMN.

Solució:



$\overline{IJ} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$.

$\overline{NK} = \overline{AB} = a$.

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Siga O el centre de l'octaedre.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és rectangle i isòsceles, $\angle AEC = 90º$.

$\overline{AO} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Siga P la projecció de I sobre el segment $\overline{AC}$.

$\overline{PI} = \frac{1}{2}\overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

L'àrea de l'hexàgon IJKLMN és igual al doble de l'àrea del trapezi KNIJ:

$$S_{IJKLMN} = 2\left(\frac{\overline{IJ}+\overline{NK}}{2}\overline{PI}\right) = 2\left(\frac{\frac{1}{2}a+a}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}a\right) = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^2.$$