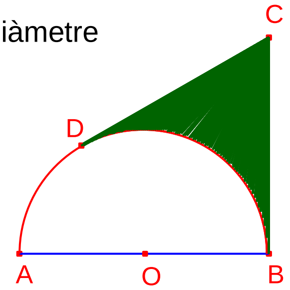
Problemes de Geometria per a l'ESO 142

1411.- En la figura, hi ha una semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

$\overline{OA} = \overline{AD} = r$, $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ són tangents a la semicircumferència.

Determineu el perímetre i l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Per ser angle inscrit i abraçar un diàmetre $\angle ADB = 90^o$.

Si $\overline{OA} = \overline{AD} = r$ el triangle $\overset{\Delta}{AOD}$ és equilàter, aleshores:

$\angle AOD = 60^o$.

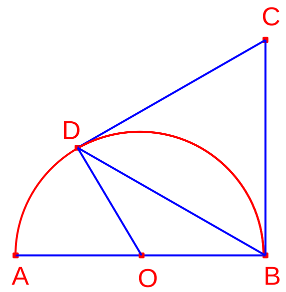
$\angle BOD = 120^o$.

Per ser $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ tangents, $\overline{CD} = \overline{BC}$ i a més a més,

$\angle ODC = \angle OBC = 90^o$.

Aleshores, $\angle BCD = 60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és equilàter.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:

$\overline{BD} = r\sqrt{3}$.

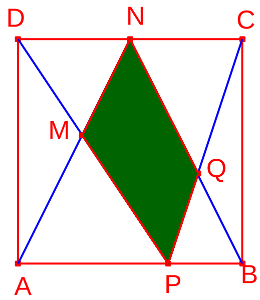
El perímetre de la regió ombrejada és igual a la suma de dos segments $\overline{CD} = \overline{BC} = r\sqrt{3}$ i un arc de 120º i radi r:

$$P_{regió} = 2\left(r\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}\pi \cdot r\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right)r.$$

L'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del triangle equilàter de costat $\overline{BD} = r\sqrt{3}$ menys l'àrea del segment circular $\overset{\frown}{BD}$:

$$S_{regió} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(r\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)r^2.$$

1412.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat c.



N és el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$\overline{AP} = 2 \cdot \overline{PB}$.

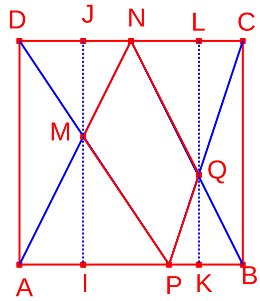
Determineu l'àrea del quadrilàter MPQN.

Solució:

$\overline{DN} = \overline{CN} = \frac{1}{2}a$. $\overline{AP} = \frac{2}{3}a$, $\overline{PB} = \frac{1}{3}a$.

Siguen I, J les projeccions de M sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Siguen K, L les projeccions de Q sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.



Els triangles $\overset{\Delta}{APM}$, $\overset{\Delta}{NDM}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{JM}}{\overline{IM}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{4}.$$

Aleshores, $\overline{JM} = \frac{3}{7}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$, $\overset{\Delta}{CNQ}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{LQ}}{\overline{KQM}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{PB}} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{2}{3}.$$

Aleshores, $\overline{LQ} = \frac{3}{5}a$.

L'àrea del quadrilàter MPQN és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDP}$, menys les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{CNQ}$, $\overset{\Delta}{NDM}$

$$S_{MPQN} = S_{CDP} - (S_{CNQ} + S_{NDM}) = \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{AD} - \left(\frac{1}{2}\overline{CN} \cdot \overline{LQ} + \frac{1}{2}\overline{DN} \cdot \overline{JM}\right).$$

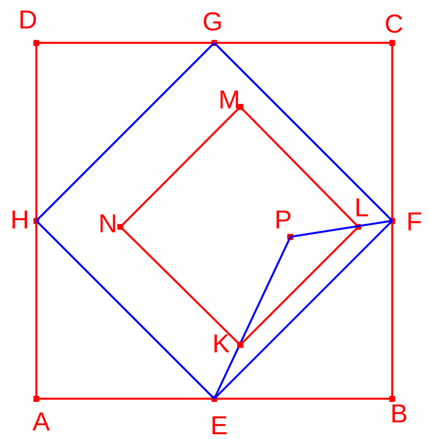
$$S_{MPQN} = \frac{1}{2}a^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{5}a + \frac{1}{2}\frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{7}a\right) = \frac{17}{70}a^2.$$

1413.- Siga K un punt interior del quadrat ABC de costat c.

Siguen K, L M, N els baricentres dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$, $\overset{\Delta}{ADP}$, respectivament.
Calculeu l'àrea del quadrilàter KLMN.

Solució:
Siguen E, F, G, H els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivament.

EFGH és un quadrat de costat $\overline{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

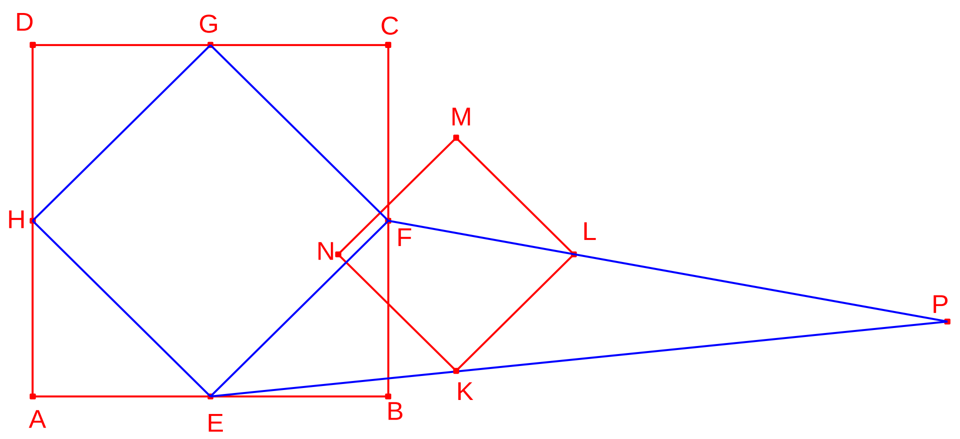


Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$\overline{PK}=2\cdot\overline{KE}$.

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$:
$\overline{PL}=2\cdot\overline{LF}$.
Aplicant el teorema invers del teorema de Tales:
$\overline{KL}$, $\overline{EF}$ són paral·lels i $\overline{KL}=\frac{2}{3}\cdot\overline{EF}$.
Aleshores, KLMN és un quadrat de costat
$\overline{KL}=\frac{2}{3}\cdot\overline{EF}=\frac{\sqrt{2}}{3}c$.
L'àrea del quadrat KLMN és:
$S_{KLMN}=\overline{KL}^2=\frac{2}{9}c^2$.

Notem que els quadrats KLMN i EFGH són homotètics de raó $\frac{2}{3}$ i el centre de l'homotècia és el punt P.

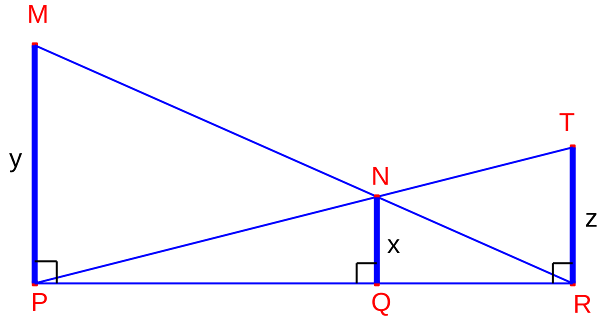
Si el punt P és exterior al quadrat el resultat és el mateix.



1414.- En la figura, $\overline{PM} \perp \overline{PR}$, $\overline{QN} \perp \overline{PR}$, $\overline{RT} \perp \overline{PR}$.

$\overline{NQ} = x$, $\overline{PM} = y$, $\overline{RT} = z$.

Proveu que $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.



Solució:

Siga $\overline{PR} = a$, $\overline{QR} = b$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MPR}$, $\overset{\Delta}{NQR}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PRT}$, $\overset{\Delta}{PQN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{z} = \frac{a-b}{a}.$$

$$\frac{x}{z} = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}.$$

$$\frac{x}{z} = 1 - \frac{x}{y}.$$

$\frac{x}{z} + \frac{x}{y} = 1$. Dividint l'expressió per x:

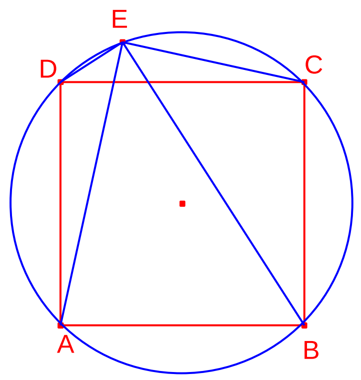
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

1415.- Siga ABCD un quadrat inscrit en una circumferència de centre O.

Siga E un punt qualsevol de l'arc $\overset{\frown}{CD}$.
Demostreu que els segments $\overline{AE}$ i $\overline{BE}$ divideixen l'angle $\angle DEC$ en tres parts iguals.
Quant mesura cadascuna de les parts?.

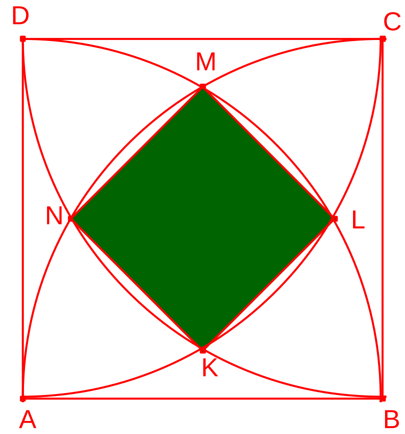
Solució:
$\angle DEA$, $\angle AEB$, $\angle BEC$ són angles inscrits en la circumferència i abracen un angle recte, aleshores:

$$\angle DEA = \angle AEB = \angle BEC = \frac{90º}{2} = 45º.$$



1416.- Des de cada vèrtex d'un quadrat ABCD i amb radi igual al costat del quadrat, es dibuixen cap a l'interior del quadrat arcs de circumferència que es tallen en els punts K, L, M, N, (veure figura).

Determineu la proporció entre les àrees dels quadrats KLMN i ABCD.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.

Siguen P, Q els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

$\overline{AM} = \overline{BM} = c$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és equilàter.

$\overline{PM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$\overline{MQ} = \overline{PK} = c - \overline{PM} = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)c$.

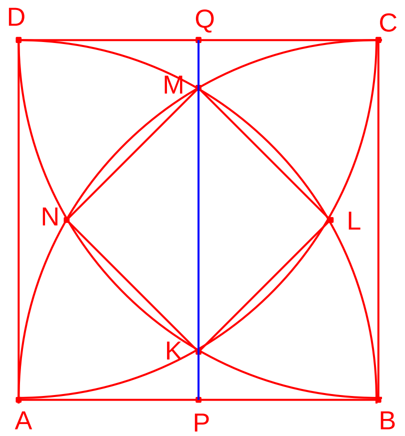
$\overline{KM} = c - 2 \cdot \overline{PK} = c - \overline{PM} = \left(\sqrt{3}-1\right)c$.

L'àrea del quadrat KLMN és:

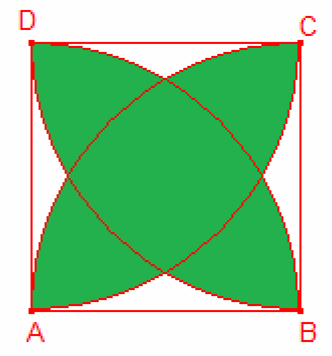
$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\overline{KM}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 c^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)c^2$.

La proporció entre les àrees dels quadrats KLMN i ABCD és:

$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)c^2}{c^2} = 2-\sqrt{3}$.



1417.- Des de cada vèrtex d'un quadrat ABCD de costat c i amb radi igual al costat del quadrat, es dibuixen cap a l'interior del quadrat arcs de circumferència (veure figura).

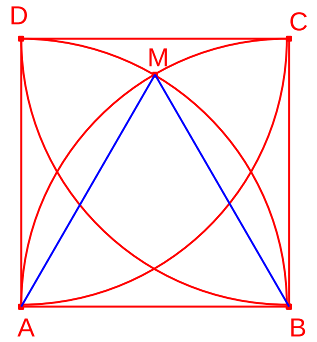


Determineu la el perímetre de la zona ombrejada.

Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.

Siga M la intersecció dels arcs de centres A i B.



$\overline{AM} = \overline{BM} = c$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és equilàter.

$\angle MAB = 60^{o}$.

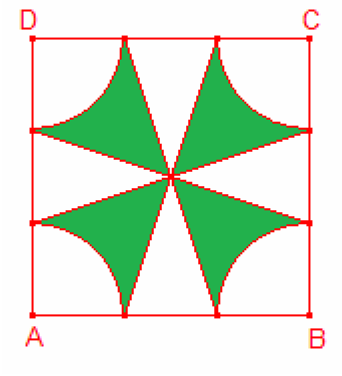
$\angle DAM = 90^{o} - 60^{o} = 30^{o}$.

El perímetre de la zona ombrejada està formada per 8 varc de radi c i 30º cadascun.

$P_{zona} = 8\left(\frac{1}{12}2\pi c\right) = \frac{4\pi}{3}c$.

1418.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat c.

Els costats del quadrat estan dividits en tres parts iguals i s'han dibuixat 4 arcs de centres els quatre vèrtexs.
Calculeu l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada.



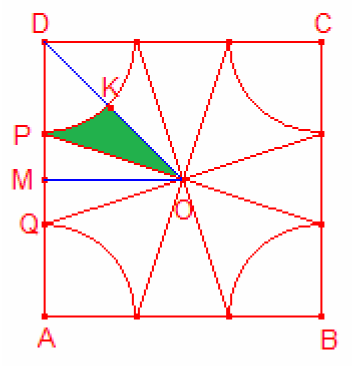
Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$ de centre O.

Siguen els punts P, Q del costat $\overline{AD}$ tal que $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{AQ} = \frac{1}{3}c$.

$\angle ODA = 45^{\circ}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$,

L'àrea ombrejada OPK és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DPO}$

menys l'àrea del sector de 45º i radi $\overline{DP} = \frac{1}{3}c$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DPO}$ és:

$$S_{DPO} = \frac{1}{2}\overline{DP} \cdot \overline{OM} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}c\frac{1}{2}c = \frac{1}{12}c^2.$$

L'àrea ombrejada OPK és:

$$S_{OPK} = \frac{1}{12}c^2 - \frac{1}{8}\pi\left(\frac{c}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{72}\right)c^2.$$

L'àrea ombrejada es igual a vuit vegades l'àrea anterior:

$$S_{regió} = 8 \cdot S_{OPK} = 8\left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{72}\right)c^2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{9}\right)c^2.$$

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{6}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:

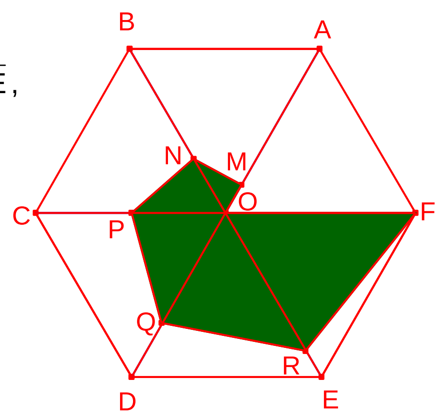
$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}c.$$

El perímetre de la figura és igual a la suma de quatre arcs de 90º i radi $\overline{DP} = \frac{1}{3}c$ més

vuit segments de longitud $\overline{OP} = \frac{\sqrt{10}}{6}c$.

$$P_{regió} = 4\left(\frac{1}{4}2\pi\frac{c}{3}\right) + 8\left(\frac{\sqrt{10}}{6}c\right) = \left(\frac{2\pi + 4\sqrt{10}}{3}\right)c.$$

1419.- Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat c i centre O.



Siguen M, N, P, Q, R sobre els segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, respectivament, tal que, $\overline{OM}=\frac{1}{6}\overline{OA}$, $\overline{ON}=\frac{2}{6}\overline{OB}$, $\overline{OP}=\frac{3}{6}\overline{OC}$, $\overline{OQ}=\frac{4}{6}\overline{OD}$, $\overline{OR}=\frac{5}{6}\overline{OE}$.

Calculeu l'àrea del polígon OMNPQRF.

Solució:

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABO}$ de costat c és: $S_T=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$S_{ORF}=\frac{\frac{5}{6}c}{c}S_T=\frac{5}{6}S_T.$$

Considerem el triangle equilàter S_1 de costat $\frac{5}{6}c$. $S_1=\left(\frac{5}{6}\right)^2S_T$.

$$S_{OQR}=\frac{\frac{4}{6}c}{\frac{5}{6}c}S_1=\frac{4}{5}S_1=\frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^2S_T=\frac{5}{9}S_T.$$

Considerem el triangle equilàter S_2 de costat $\frac{4}{6}c$. $S_2=\left(\frac{4}{6}\right)^2S_T$.

$$S_{OPQ}=\frac{\frac{3}{6}c}{\frac{4}{6}c}S_2=\frac{4}{5}S_2=\frac{3}{4}\left(\frac{4}{6}\right)^2S_T=\frac{1}{3}S_T.$$

Considerem el triangle equilàter S_3 de costat $\frac{3}{6}c$. $S_3=\left(\frac{3}{6}\right)^2S_T$.

$$S_{ONP}=\frac{\frac{2}{6}c}{\frac{3}{6}c}S_3=\frac{2}{3}S_3=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^2S_T=\frac{1}{6}S_T.$$

Considerem el triangle equilàter S_4 de costat $\frac{2}{6}c$. $S_4=\left(\frac{2}{6}\right)^2S_T$.

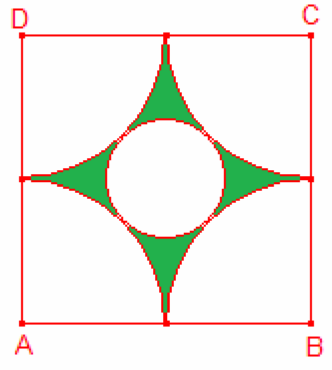
$$S_{ONP}=\frac{\frac{1}{6}c}{\frac{2}{6}c}S_4=\frac{1}{2}S_4=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2S_T=\frac{1}{18}S_T.$$

L'àrea del polígon OMNPQRF és igual a la suma de les àrees dels 5 triangles que el formen

$$S_{OMNPQRF}=\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)S_T=\frac{35}{18}S_T=\frac{35}{18}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\frac{35\sqrt{3}}{72}c^2.$$

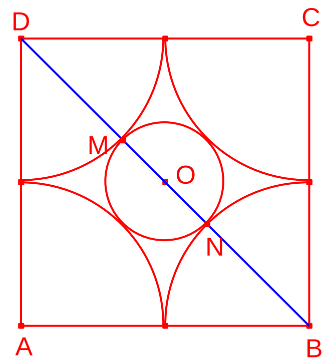
1420.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat c.

S'han dibuixat 4 arcs amb centre en els vèrtexs i radi la meitat del costat i una circumferència tangent als quatre arcs.
Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga O el centre del quadrat. O és el centre de la circumferència tangent als quatre arcs.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = c\sqrt{2}$.



La diagonal $\overline{BD}$ del quadrat talla dos arcs en els punts M, N (punts de tangència amb la circumferència).

$\overline{DM} = \overline{BN} = \frac{1}{2}c$.

$\overline{MN} = \overline{BD} - 2\overline{DM} = c\sqrt{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}c = \left(\sqrt{2}-1\right)c$.

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea de quatre quadrants de radi $\frac{1}{2}c$, menys l'àrea d'un cercle de radi $\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$.

$$S_{\text{regió}} = \left(c^2 - \pi\left(\frac{1}{2}c\right)^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}c\right)^2\right) = \frac{2-2\pi+\pi\sqrt{2}}{2}c^2.$$