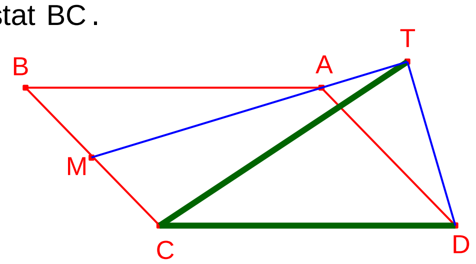
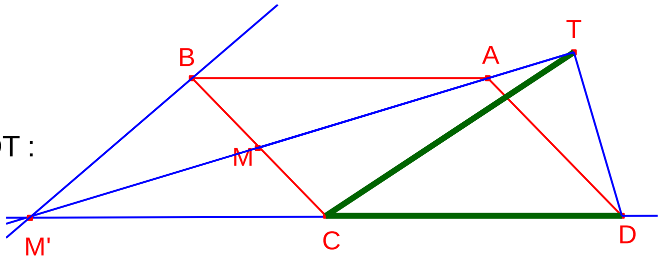
Problemes de Geometria per a l'ESO 143

1421.- En un paral·lelogram ABCD, M és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Pel punt D es dibuixa una perpendicular a la recta AM que es tallen en T (veure figura).
Demostreu que $\overline{CT} = \overline{CD}$.



Solució:
La recta AM talla la recta CD en el punt M'.
Notem que ABM'C és un paral·lelogram.
$\overline{CM'} = \overline{AB} = \overline{CD}$.
C és el punt mig del segment $\overline{DM'}$.
C és el circumcentre del triangle rectangle $\overset{\Delta}{M'DT}$:
$\overline{CT} = \frac{1}{2}\overline{DM'} = \overline{CD}$.

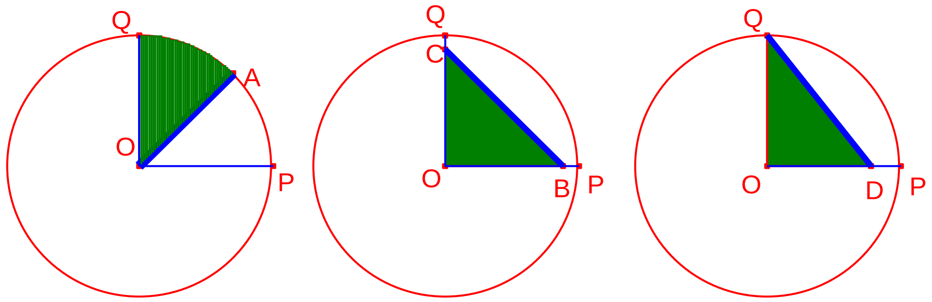


1422.- En la figura, les tres circumferències tenen radi r.

$\overline{OB} = \overline{OC}$.

Els segments $\overline{OA}$, $\overline{BC}$, $\overline{DQ}$ divideixen el quadrant format per l'arc $\overset{\frown}{PQ}$, en dues parts d'igual àrea.

Determineu les mesures dels segments $\overline{OA}$, $\overline{BC}$, $\overline{DQ}$.



Solució:

L'àrea del quadrant és $S_{quadrant} = \frac{1}{4}\pi r^2$.

L'àrea de les tres zones ombrejades és:

$S = \frac{1}{2} S_{quadrant} = \frac{\pi}{8} r^2$.

$\overline{OA} = r$ és la bisectriu del quadrant.

Siga $\overline{OB} = \overline{OC} = x$.

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OBC}$:

$S_{OBC} = \frac{1}{2} x^2 = \frac{\pi}{8} r^2$.

$x^2 = \frac{\pi}{4} r^2$, $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBC}$:

$\overline{BC} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2} r^2} = r\sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.2533 \cdot r$.

Siga $\overline{OD} = y$.

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ODQ}$:

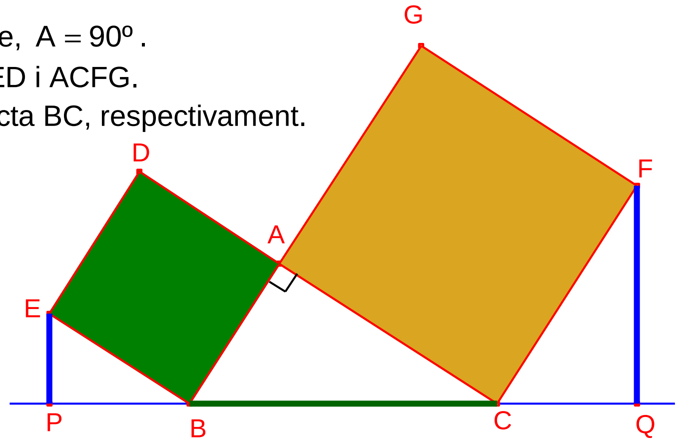
$S_{ODQ} = \frac{1}{2} y \cdot r = \frac{\pi}{8} r^2$.

$y = \frac{\pi}{4} r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODQ}$:

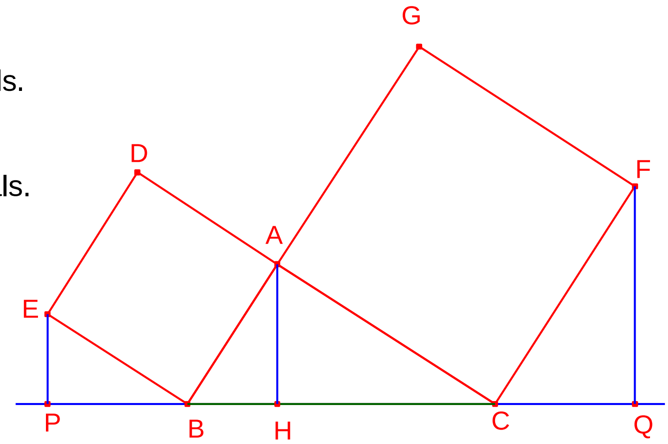
$\overline{DQ} = \sqrt{r^2 + y^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\pi}{4} r\right)^2} = \frac{r}{4}\sqrt{16 + \pi^2} \approx 1.2716 \cdot r$.

1423.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle, $A = 90º$.
Sobre els catets s'han dibuixat els quadrats ABED i ACFG.
Siguen P i Q les projeccions de E i F sobre la recta BC, respectivament.
Proveu que $\overline{BC} = \overline{EP} + \overline{FQ}$.



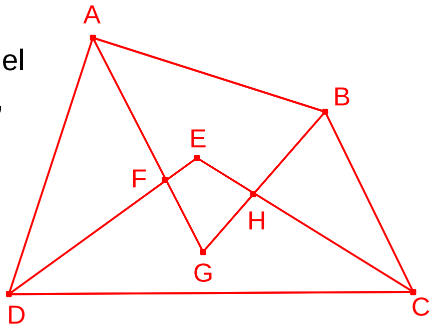
BC=EP+FG

Solució:
Siga H la projecció de A sobre la recta BC.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHB}$, $\overset{\Delta}{BPE}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{EP} = \overline{BH}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{CQF}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{FQ} = \overline{CH}$.
$\overline{EP} + \overline{FQ} = \overline{BH} + \overline{CH} = \overline{BC}$



1424.- En la següent figura, s'ha dibuixat les bisectrius del quadrilàter ABCD, les quals s'intersecten en els punts E, F, G, H.

Demostreu que el quadrilàter EFGH és cíclic.



Solució:

$A+B+C+D=360^{o}$.

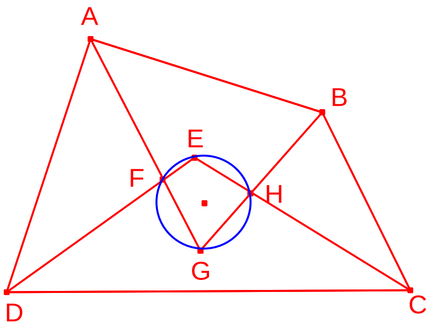
$\angle DAG=\angle BAG=\frac{A}{2}$, $\angle ABG=\angle GBC=\frac{B}{2}$, $\angle BCE=\angle DCE=\frac{C}{2}$, $\angle CDE=\angle EDA=\frac{D}{2}$.

$\angle DEC=180^{o}-\frac{C+D}{2}$, $\angle AGD=180^{o}-\frac{A+B}{2}$.

Vegem que aquests dos angles són suplementaris:

$\angle DEC+\angle AGB=180^{o}-\frac{C+D}{2}+180^{o}-\frac{A+B}{2}=360^{o}-\frac{A+B+C+D}{2}=180^{o}$.

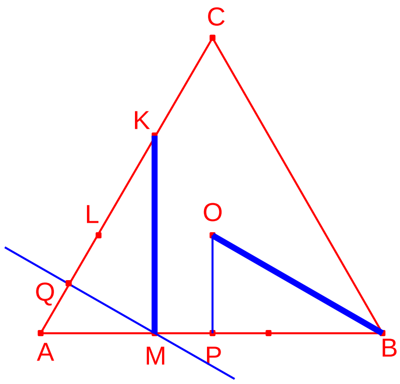
Aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter EFGH és cíclic.



1425.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$, el punt K divideix el costat $\overline{AC}$ en la raó 2:1 i el punt M divideix el costat $\overline{AB}$ en la raó 1:2.

Demostreu que la longitud del segment $\overline{KM}$ és igual al radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:



Siga L el punt mig del segment $\overline{AK}$.
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de M sobre el costat $\overline{AC}$.
Siga O el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$A = 60^o$, $\frac{\overline{AM}}{\overline{AK}} = \frac{1}{2}$, aleshores:

El triangle $\overset{\Delta}{AMK}$ és rectangle, $\angle AMK = 90^o$.

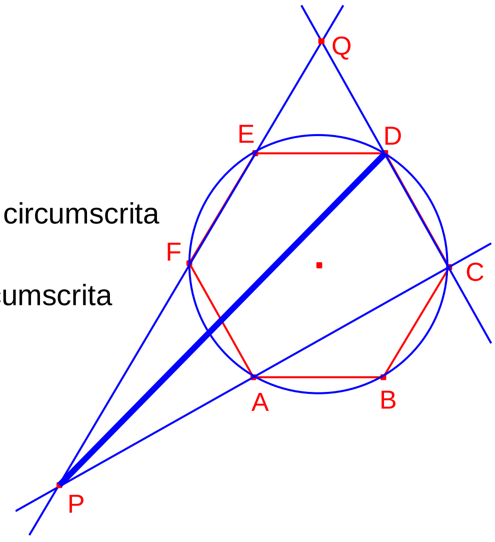
El triangle $\overset{\Delta}{AML}$ és equilàter.

Q és el punt mig del segment $\overline{AL}$.

$\overline{KQ} = \overline{BP}$, $\angle AKM = \angle OBP$, aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMK}$, $\overset{\Delta}{OPB}$ són iguals, aleshores, $\overline{KM} = \overline{OB}$, per tant, la longitud del segment $\overline{KM}$ és igual al radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

1426.- En un hexàgon regular ABCDEF de costat $\sqrt{13}$, les prolongacions de la diagonal $\overline{AC}$ i el costat $\overline{EF}$ es tallen en el punt P.

Determineu $\overline{PD}$.



Solució:

Les rectes EF i DE es tallen en el punt Q.

El triangle $\overset{\Delta}{EDQ}$ és equilàter.

$\overline{DQ} = \overline{AB} = \sqrt{13}$.

$\angle ACD = 90^{o}$ ja que és un angle inscrit a la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular.

$\angle EPC = 30^{o}$ per ser angle exterior a la circumferència circumscrita a l'hexàgon regular i abraçar 120º i 60º.

$\overline{CQ} = 2\sqrt{13}$.

$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{CQ} = 4\sqrt{13}$.

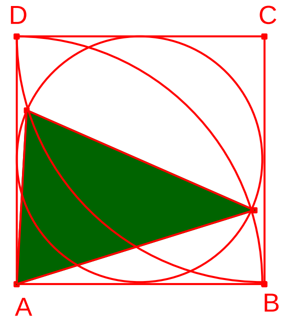
$\overline{PC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ} = 2\sqrt{39}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCD}$:

$\overline{PD} = \sqrt{\left(2\sqrt{39}\right)^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2} = 13$.

1427.- Siga el quadrat ABCD de costat c.

Determineu l'àrea de la regió ombrejada, si A i C són centres dels arcs $\overset{\frown}{BD}$.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{APQ}$ el triangle ombrejat.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
O és el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

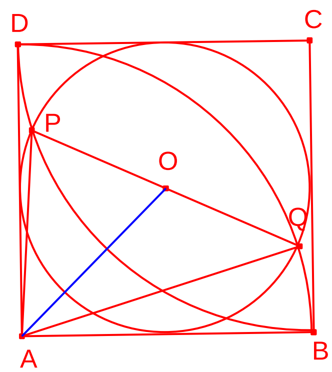
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = c\sqrt{2}$.

$\overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

$\overline{OQ} = \overline{OP} = \frac{1}{2}c$.

$\overline{AQ} = c$.



Aplicant la fórmula d'Heró al triangle $\overset{\Delta}{AOQ}$:

$$S_{AOQ} = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}c \cdot \frac{-1+\sqrt{2}}{2}c \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2}c \cdot \frac{3-\sqrt{2}}{2}c}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{16}c^2.$$

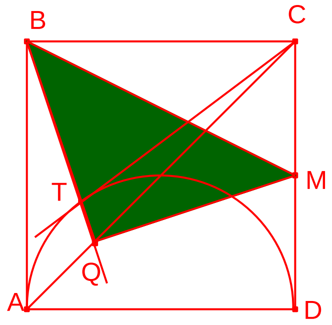
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és igual al doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOQ}$:

$$S_{APQ} = 2S_{AOQ} = \frac{\sqrt{7}}{8}c^2.$$

1428.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat $\overline{AB}=4$, M és el punt mig del costat $\overline{CD}$.

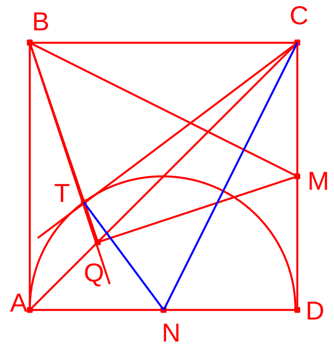
T és punt de tangència.
La recta BT i la diagonal $\overline{AC}$ és tallen en el punt G.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BGM}$.



Solució:
Siga N el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Per ser T i D punts de tangència, $\overline{CT}=\overline{CD}$, $\overline{TN}\perp\overline{CT}$, $\overline{DN}\perp\overline{CD}$.
Siga $\alpha=\angle DCN=\angle TCN$.
$\alpha=\angle CDM$.

$\angle DCT=90º-2\alpha$. El triangle $\overset{\Delta}{DCQ}$ és isòsceles:
$\angle CBQ=\angle BQC=45º+\alpha$.



Aleshores, $QBM=45º$.
$ACM=45º$.
Aleshores, BCMQ és cíclic,
Aleshores, $\angle BQM=180º-\angle MCB=90º$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BQM}$ és rectangle i isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCM}$:
$\overline{BM}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BQM}$ és:
$$S_{BQM}=\frac{1}{4}\overline{BM}^2=5.$$

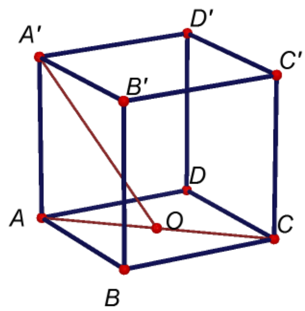
1429.- Calculeu l'àrea total d'un cub, sabent que la distància d'un dels vèrtexs al centre d'una cara oposada és 2.

Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB} = c$.

Siga O el centre de la cara ABCD.

Siga $\overline{A'O} = 2$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{Ac} = a\sqrt{2}$.

$\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOA'}$:

$2^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$. Simplificant:

$a^2 = \frac{8}{3}$.

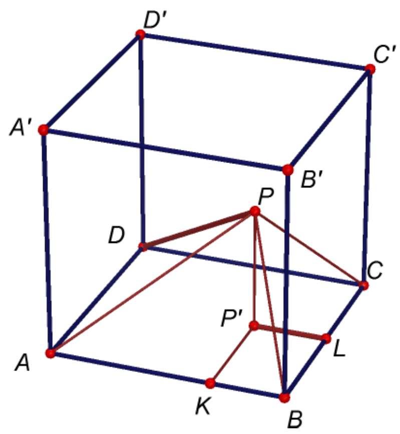
La superfície del cub és:

$S = 2a^2 = 6\frac{8}{3} = 16$.

1430.- Siga P un punt interior al cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta a, tal que $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-\overline{PB}^2=a^2$.

Determineu la mesura del segment $\overline{PD}$.

Solució:



Siga P’ La projecció de P sobre la base ABCD.

Siga K la projecció de P’ sobre l’aresta $\overline{AB}$.

Siga L la projecció de P’ sobre l’aresta $\overline{BC}$.

Siga $\overline{PP'}=h$, $\overline{AK}=x$, $\overline{BL}=y$.

$\overline{PA}^2=x^2+y^2+h^2$.

$\overline{PB}^2=(a-x)^2+y^2+h^2$.

$\overline{PC}^2=(a-x)^2+(a-y)^2+h^2$.

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2-\overline{PB}^2=x^2+(a-y)^2+h^2=a^2$

$\overline{PD}^2=x^2+(a-y)^2+h^2$.

$\overline{PD}^2=a^2$.

$\overline{PD}=a$.