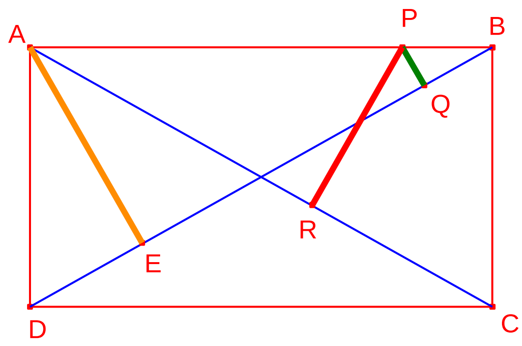
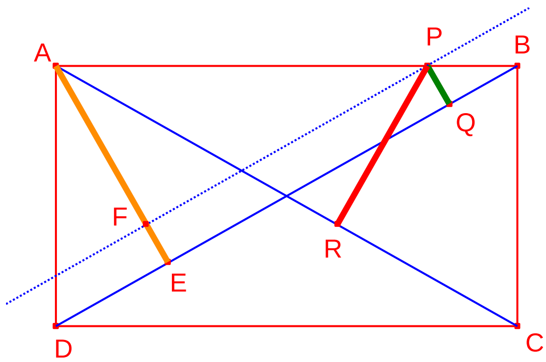
Problemes de Geometria per a l'ESO 144

1431.- En la figura ABCD és un rectangle.
Siga P un punt qualsevol del costat $\overline{AB}$.
Siguen Q i R les projeccions de P sobre les diagonals $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$, respectivament.
Siga F la projecció de A sobre la diagonal $\overline{BD}$.
Proveu que $\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{AE}$.



Solució:
La recta paral·lela a la diagonal $\overline{BD}$ que passa pel punt P talla el segment $\overline{AE}$ en el punt F.
Notem que EFPQ és un rectangle.
$\overline{PQ}=\overline{FE}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ARP}$, $\overset{\Delta}{PFA}$ són iguals.
Aleshores:
$\overline{PR}=\overline{AF}$.
$\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{FE}+\overline{AF}=\overline{AE}$.



1432.- Determineu l'equació de la circumferència simètrica de la circumferència $(x+6)^2+(y-3)^2=5^2$ respecte de la recta $y=2x+5$.
Determineu la intersecció de les dues circumferències.

Solució:
La circumferència $(x+6)^2+(y-3)^2=5^2$ té centre el punt $O(-6,3)$ i radi 5.
La circumferència simètrica respecte de la recta $y=2x+5$ té el mateix radi i el centre O' és el punt simètric de O respecte de la recta $y=2x+5$.

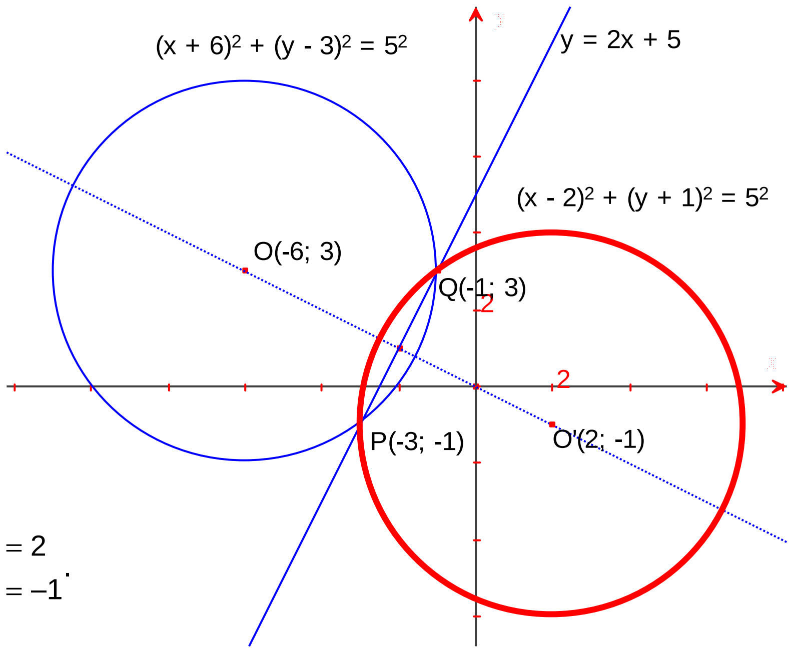
La recta perpendicular a la recta $y=2x+5$ que passa pel punt O té pendent $\frac{-1}{2}$ la seua equació és:

$$y-3=\frac{-1}{2}(x+6).$$

La intersecció de les dues rectes és el punt projecció de O sobre la recta $y=2x+5$:

$$\begin{cases} y=2x+5 \\ y=\frac{-1}{2}x \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}.$$



El punt projecció té coordenades:
$O_p(-2,1)$.
Siga $O'(x,y)$ el centre de la circumferència simètrica.
$O_p(-2,1)$ és el punt mig del segment $\overline{OO'}$:

$$\begin{cases} -2=\frac{-.6+x}{2} \\ 1=\frac{3+y}{2} \end{cases}$$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

Les coordenades del centre de la circumferència simètrica són $O'(2,-1)$.
L'equació de la circumferència simètrica és:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5^2.$$

La intersecció de les dues circumferències és igual a la intersecció de la circumferència $(x+6)^2+(y-3)^2=5^2$ i la recta $y=2x+5$.

$$\begin{cases} (x+6)^2+(y-3)^2=5^2 \\ y=2x+5 \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$. Les coordenades dels punts intersecció són:

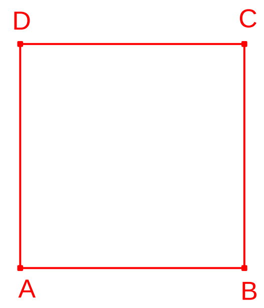
$P(-3,-1)$, $Q(-1,3)$.

1433.- Determineu el costat d'un quadrat coneguda a, la suma del costat i la diagonal.

Solució:

Siguen, $c=\overline{AB}$, $d=\overline{AC}$, el costat i la diagonal del quadrat ABCD, respectivament.

$c+d=a$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$d^2=2c^2$.

$a^2=(c+d)^2=c^2+d^2+2cd$.

$a^2=3c^2+2c(a-c)$.

$c^2+2ac-a^2=0$.

$c=\left(-1+\sqrt{2}\right)a$.

La diagonal és $d=a-c=\left(2-\sqrt{2}\right)a$.

Construcció 1:

Siga $\overline{PQ}=a=c+d$.

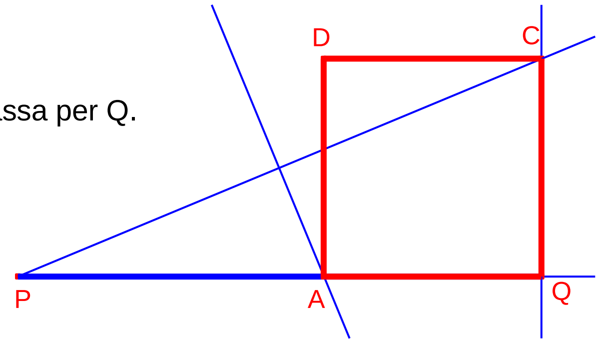
a) Dibuixem la recta perpendicular a $\overline{PQ}$ que passa per Q.

b) Dibuixeu l'angle $\angle CPQ=22^{o}30'$.

c) Dibuixeu la recta mediatriu al segment $\overline{PC}$.

d) La recta mediatriu talla el segment $\overline{PQ}$ en el punt A. Notem que $\angle CAQ=45^{o}$, $\overline{PA}=\overline{AC}$.

Aleshores, el quadrat que cerquem és AQCD.



Construcció 2:

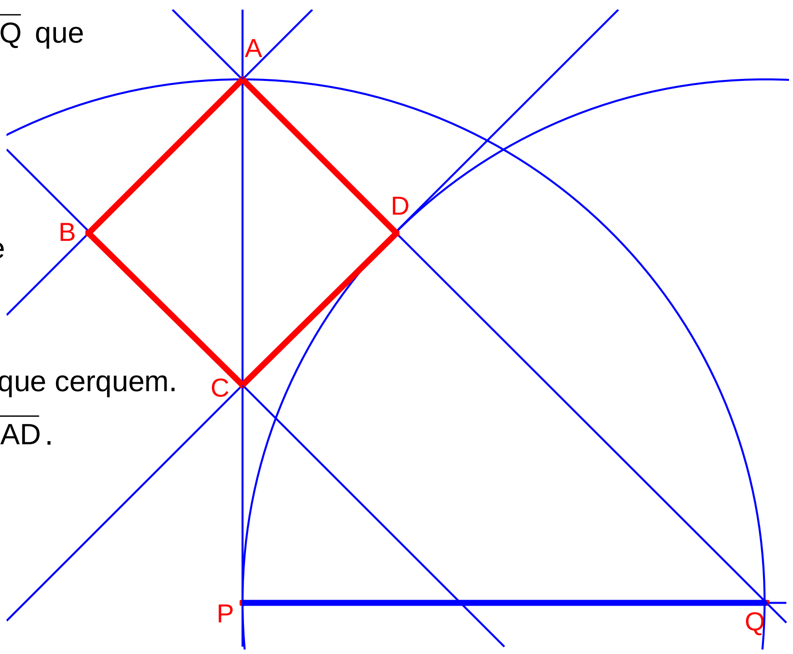
a) Dibuixem la recta perpendicular a $\overline{PQ}$ que passa per P.

b) Siga A de la recta perpendicular tal que $\overline{PA}=\overline{PQ}$. Notem que $\overline{AQ}=a\sqrt{2}$.

c) Dibuixem la circumferència de centre Q que passa per P que talla la recta AQ en el punt D. Notem que $\overline{AD}=a$.

d) $\overline{AD}=\left(-1+\sqrt{2}\right)a$, costat del quadrat que cerquem.

e) Dibuixar el quadrat ABCD de costat $\overline{AD}$.

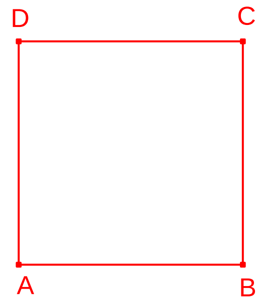


1434.- Determineu el costat d'un quadrat coneguda a, la diferència de la diagonal i del costat.

Solució:

Siguen, $c=\overline{AB}$, $d=\overline{AC}$, el costat i la diagonal del quadrat ABCD, respectivament.

$d-c=a$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$d^2=2c^2$.

$a^2=(d-c)^2=c^2+d^2-2cd$.

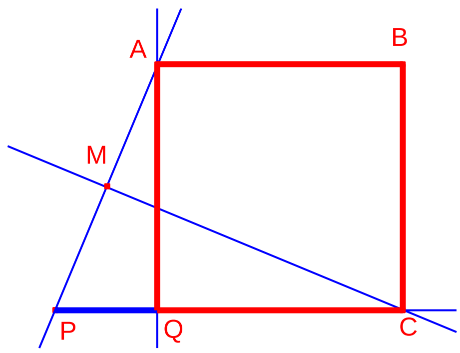
$a^2=3c^2-2c(a+c)$.

$c^2-2ac-a^2=0$.

$c=\left(1+\sqrt{2}\right)a$.

La diagonal és $d=a-c=\left(2+\sqrt{2}\right)a$.

Construcció 1:



Siga $\overline{PQ}=a=d-c$.

a) Dibuixem la recta perpendicular a $\overline{PQ}$ que passa per Q.

b) Dibuixem l'angle $\angle APQ=67^{o}30'$.

c) Dibuixem la recta mediatriu al segment $\overline{PA}$.

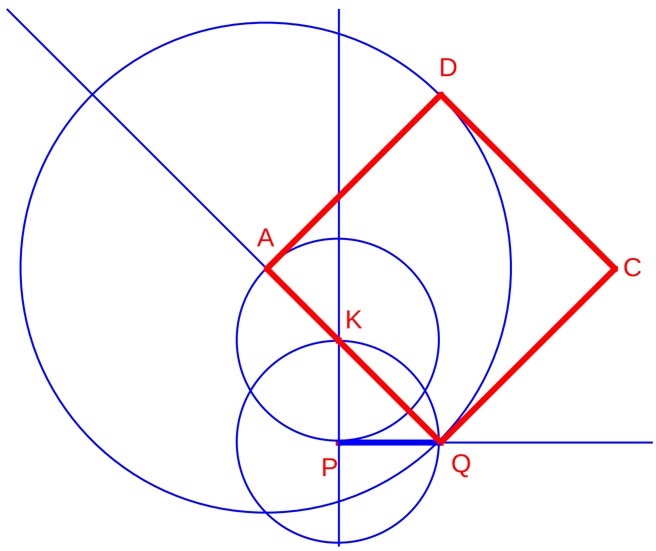
d) La recta mediatriu talla la recta en el punt C. Notem que $\angle PCM=22^{o}30'$, aleshores, $\angle CAQ=45^{o}$, $\overline{QA}=\overline{QC}$.

$\overline{PC}=\overline{AC}$, $\overline{PQ}=\overline{PC}-\overline{QC}=\overline{AC}-\overline{AQ}=d-c$.

Aleshores, el quadrat que cerquem és ABCQ.

e) Dibuixem el quadrat ABCQ.

Construcció 2:



a) Dibuixem la recta perpendicular a $\overline{PQ}$ que passa per P.

b) Siga K de la recta perpendicular tal que $\overline{PK}=\overline{PQ}$. Notem que $\overline{QK}=a\sqrt{2}$.

c) Dibuixem la circumferència de centre K que passa per P que talla la recta QK en el punt A. Notem que $\overline{QA}=a\left(1+\sqrt{2}\right)$, costat del quadrat que cerquem.

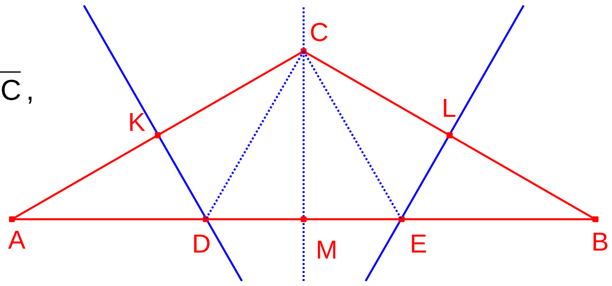
D) Dibuixem el quadrat AQCD de costat $\overline{QA}$.

1435.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 120^{o}$.

Les mediatrius dels costats iguals tallen els costat desigual en els punts D, E.

Proveu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEC}$ és la tercera part del l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
KöMaL, K429. Octubre 2014.

Solució:
Si $C = 120^{o}$, els costats iguals són $\overline{AC} = \overline{BC}$.
$A = B = 30^{o}$.
Siguen K, L, M els punts migs dels costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, respectivament.



En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$, $A = 30^{o}$,

aleshores, $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKD}$, $\overset{\Delta}{CMD}$, són iguals, aleshores,

$\angle KCD = \angle MCD = \frac{1}{2}\angle ACM = \frac{1}{2}60^{o} = 30^{o}$.

$\angle DCE = 60^{o}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DEC}$ és equilàter. Per tant:
$\overline{CD} = \overline{DE}$.

$\angle CAD = \angle ACD = 30^{o}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$. Per tant:
$\overline{CD} = \overline{AD}$.

Aleshores, $\overline{AD} = \overline{DE}$.Per tant, $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa altura $\overline{CM}$, les àrees són proporcionals a les bases:

$\frac{S_{DEC}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{1}{3}$.

1436.- Si les mesures dels catets d'un triangle rectangle són a, b i la hipotenusa c, i a més a més, $a+b=4+c$, calculeu la proporció entre el perímetre i l'àrea del triangle.

KöMaL, K432. Octubre 2014.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C=90^o$.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$P=a+b+c=4+2c$.

Elevem al quadrat l'expressió $a+b=4+c$:

$(a+b)^2=(4+c)^2$.

$a^2+b^2+2ab=16+8c+c^2$. Aplicant el teorema de Pitàgores: $a^2+b^2=c^2$.

$c^2+2ab=16+8c+c^2$. Simplificant:

$ab=8+4c$.

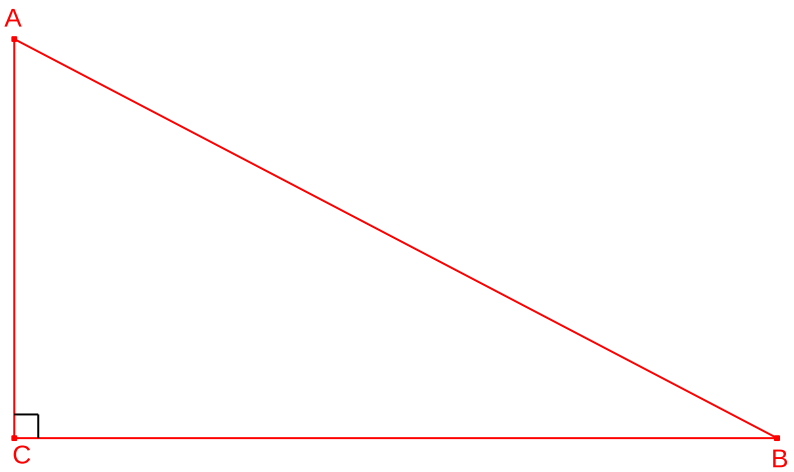
L'àrea del triangle rectangle és:

$S=\frac{1}{2}ab$.

$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(8+4c)=4+2c$.

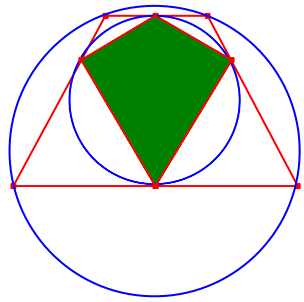
La proporció entre les magnituds perímetre i àrea és:

$\frac{P}{S}=\frac{4+2c}{4+2c}=1.$



1437.- Un trapezi isòsceles té inscrita una circumferència.

Si l'altura del trapezi és 30 i els costats iguals 34, calculeu l'àrea del quadrilàter ce vèrtexs els punts de tangència de la circumferència inscrita i el trapezi.

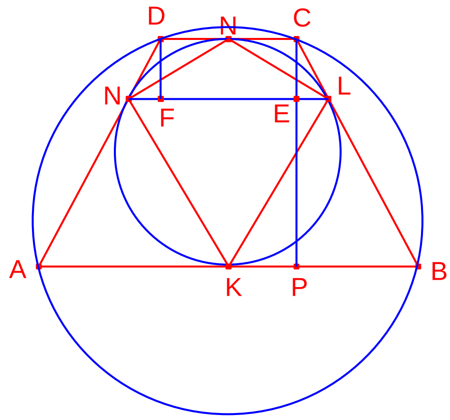


Solució:

Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

$\overline{AD} = \overline{BC} = 34$.

Siga KLMN el quadrilàter inscrit en el trapezi amb els punts de tangència de la circumferència inscrita (la figura és un cometa.



La seua àrea és $S_{KLMN} = \frac{1}{2}\overline{KM} \cdot \overline{LN}$.

$\overline{KM} = 30$.

Siga $\overline{MC} = a$.

$\overline{LC} = a$.

Siga P la projecció de C sobre la base $\overline{AB}$, $\overline{KP} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPB}$:

$\overline{KB} = 16$.

$\overline{BL} = \overline{BK} = a + 16$.

$\overline{BC} = \overline{BL} + \overline{LC} = 2a + 16 = 34$.

$a = 9$.

$\overline{AB} = 2a + 2 \cdot 16 = 50$, $\overline{CD} = 2a = 18$.

Siguen E i F les projeccions de C i D sobre el segment $\overline{LN}$, respectivament.

$\overline{EF} = \overline{CD} = 18$.

Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{CPB}$, $\overset{\Delta}{CEL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{EL}}{9} = \frac{16}{34}$, aleshores, $\overline{EL} = \frac{72}{17}$.

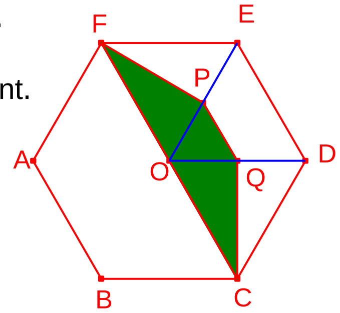
$\overline{LN} = \overline{EF} + 2\overline{EL} = 9 + 2 \cdot \frac{72}{17} = \frac{450}{17}$.

L'àrea del quadrilàter KLMN és:

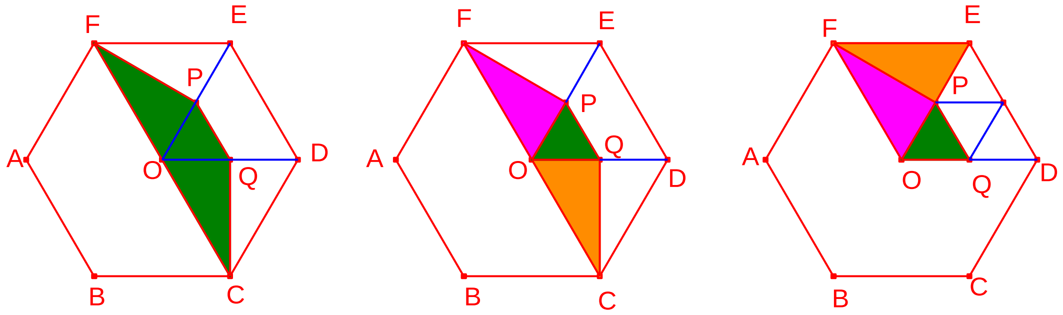
$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\overline{KM} \cdot \overline{LN} = \frac{1}{2} 30 \cdot \frac{450}{17} = \frac{6750}{17} \approx 397.0588$.

1438.- En la figura, ABCDEF és un hexàgon regular de centre O.

P i Q són els punts migs dels segments $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, respectivament. Determineu la raó entre les àrees del quadrilàter DQPF i l'hexàgon ABCDEF.



Solució:



$$S_{OPF} + S_{OQC} = S_{OEF}.$$

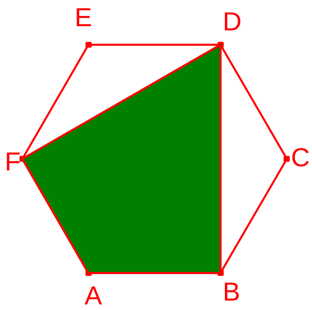
$$S_{OEF} = \frac{1}{6} S_{ABCDEF}, \quad S_{OPQ} = \frac{1}{4} S_{OEF}.$$

$$S_{CQPF} = S_{OEF} + S_{OPQ} = \frac{5}{4} S_{OEF} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6} S_{ABCDEF} = \frac{5}{24} S_{ABCDEF}.$$

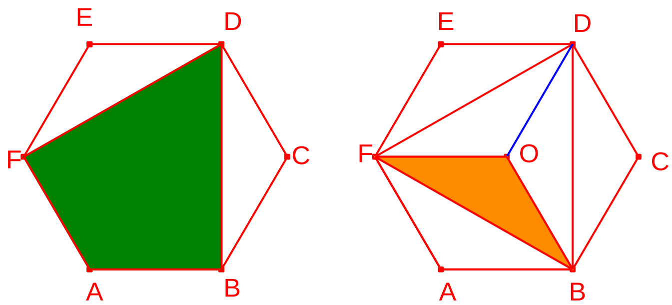
$$\frac{S_{CQPF}}{S_{ABCDEF}} = \frac{5}{24}$$

1439.- En la figura, ABCDEF és un hexàgon regular.

Determineu la raó entre les àrees del quadrilàter ABDF i l'hexàgon ABCDEF.

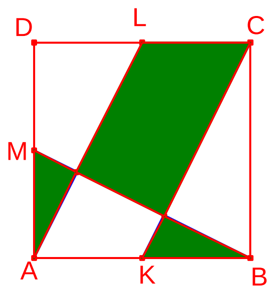


Solució:



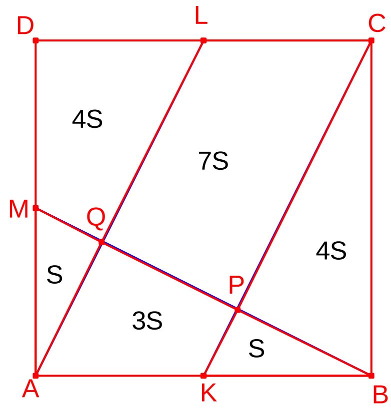
$$\frac{S_{ABDF}}{S_{ABCDEF}}=\frac{4\cdot S_{BOF}}{6\cdot S_{BOF}}=\frac{2}{3}.$$

1440.- En la figura, ABCD és un quadrat.



K, L, M són punts migs dels costats.
De termineu la proporció entre l'àrea ombrejada i la del quadrat ABCD.

Solució:



Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KPB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{KPB}$, $\overset{\Delta}{BPC}$ i de raó 1:2.

Els triangles $\overset{\Delta}{KPB}$, $\overset{\Delta}{MQA}$, aleshores:

$S_{KPB} = S_{MQA} = S$

Aleshores, $S_{BPC} = 2^2 S = 4S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{KBC}$, $\overset{\Delta}{LDA}$, aleshores:

$S_{DMQL} = S_{BPC} = 4S$.

$S_{KBC} = 5S$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KBC}$ és igual a la quarta part del quadrat ABCD, aleshores:

$S_{MBCD} = 3 \cdot S_{KBC} = 15S$.

$S_{QPCL} = S_{MBCD} - (S_{PBC} + S_{DMQL}) = 7S$.

L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = 20S$.

L'àrea ombrejada és:

$S_{ombrejada} = 9S$.

La proporció entre les àrees de la regió ombrejada i el quadrat és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{9S}{20S} = \frac{9}{20}.$$