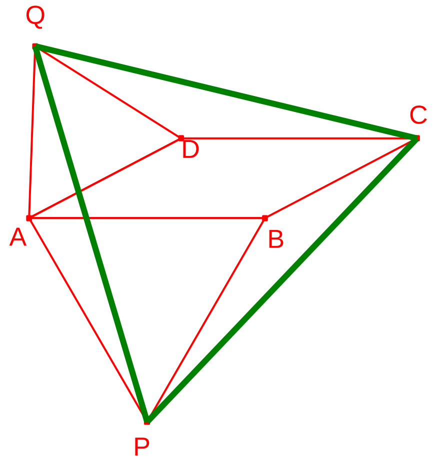
Problemes de Geometria per a l'ESO 145

1441.- Sobre l'exterior del paral·lelogram ABCD es dibuixen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{ADQ}$. Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{PQC}$ és equilàter.



Solució:

Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\angle DAB = \alpha$.

$\overline{AP} = a$, $\overline{AQ} = b$, $\angle QAP = 120º + \alpha$.

$\overline{BP} = a$, $\overline{BC} = b$, $\angle PBC = 120º + \alpha$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{BPC}$ són iguals. Aleshores:

$\overline{PQ} = \overline{PC}$.

$\overline{Cd} = a$, $\overline{DQ} = b$, $\angle QDC = 120º + \alpha$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{DCQ}$ són iguals. Aleshores:

$\overline{PQ} = \overline{CQ}$.

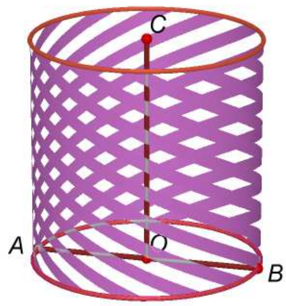
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PQC}$ és equilàter.

1442.- El litre de mesurar líquids és un cilindre tal que l'altura és doble del diàmetre de la base.

Calculeu les seues dimensions en centímetres.

Solució:
Determinarem el radi i l'altura del cilindre.
Siga el cilindre de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$ i altura $h = \overline{OC} = 2\overline{AB} = 4R$.
El volum del cilindre és $1dm^3$ ja que la seua capacitat és 1 litre.

El volum del cilindre és:
$V = S_b \cdot h = \pi R^2 \cdot 4R = 4\pi \cdot R^3$.
$4\pi \cdot R^3 = 1$. Resolent l'equació:
$R = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \approx 0.430 dm \equiv 4.30\ cm$.
$h = 4R = 4\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi}} \approx 1.721\ dm \equiv 17.21\ cm$.



1443.- Demostreu que les àrees laterals i els volums dels cons engendrat per un triangle rectangle que gira al voltant dels seus catets són inversament proporcionals als catets fixos.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, de catets b, c i hipotenusa a.

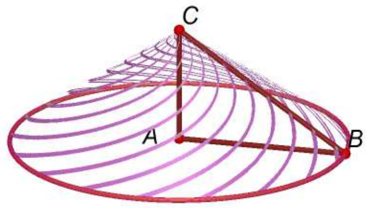
Considerem el con de revolució al girar el triangle al voltant de catet b (fix).

La seua àrea lateral és:

$S_{fix\_b} = \pi \cdot c \cdot a$.

El seu volum és:

$V_{fix\_b} = \frac{1}{3}\pi c^2 b$.



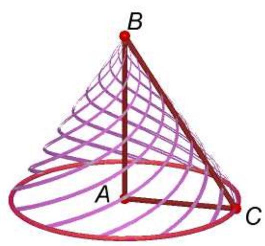
Considerem el con de revolució al girar el triangle al voltant de catet c (fix).

La seua àrea lateral és:

$S_{fix\_c} = \pi \cdot b \cdot a$.

El seu volum és:

$V_{fix\_c} = \frac{1}{3}\pi b^2 c$.



La proporció entre les àrees laterals és:

$$\frac{S_{fix\_b}}{S_{fix\_c}} = \frac{\pi \cdot c \cdot a}{\pi \cdot b \cdot a} = \frac{c}{b}.$$

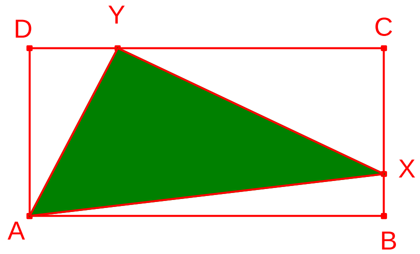
Aleshores, les àrees laterals són inversament proporcionals als catets fixos.

La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{fix\_b}}{V_{fix\_c}} = \frac{\frac{1}{3}\pi c^2 b}{\frac{1}{3}b^2 c} = \frac{c}{b}.$$

Aleshores, els volums són inversament proporcionals als catets fixos.

1444.- Siga el rectangle ABCD.



Siga X del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BX}=\frac{1}{4}\overline{BC}$.

Siga Y del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{CY}=\frac{3}{4}\overline{CD}$.

Calculeu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{AXY}$ i del rectangle ABCD.

Solució:

Siga $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$, costats del rectangle ABCD.

L'àrea del rectangle ABCD és $S=ab$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABX}$ és:

$$S_{ABX}=\frac{1}{2}a\frac{1}{4}b=\frac{1}{8}S.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADY}$ és:

$$S_{ADY}=\frac{1}{2}\frac{1}{4}ab=\frac{1}{8}S.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{XCY}$ és:

$$S_{XCY}=\frac{1}{2}\frac{3}{4}a\frac{3}{4}b=\frac{9}{32}S.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AXY}$ és:

$$S_{AXY}=S-S_{ABX}-S_{ADY}-S_{XCY}=S-\frac{1}{8}S-\frac{1}{8}S-\frac{9}{32}S=\frac{15}{32}S.$$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{AXY}$ i del rectangle ABCD és:

$$\frac{S_{AXY}}{S}=\frac{15}{32}.$$

1445.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de coordenades $A(0,0)$, $B(1,4)$, $C(-4,9)$.

Determineu l'àrea de la figura intersecció del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$ simètric del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ respecte de l'eix d'ordenades.

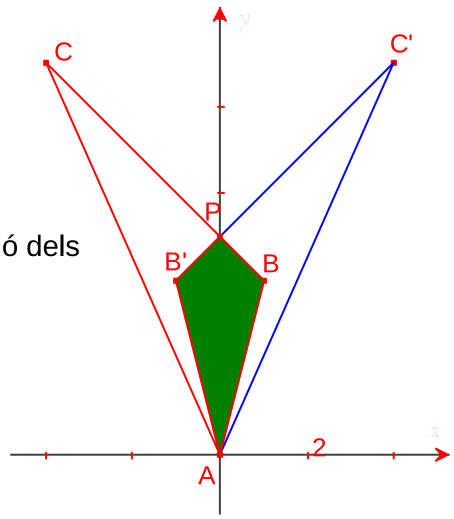
Solució:

Les coordenades del punt B' simètric de B respecte de l'eix d'ordenades és:

$B'(-1,4)$

Les coordenades del punt C' simètric de B respecte de l'eix d'ordenades és:

$C'(4,9)$.



La recta que passa pels punts B, C té equació:

$y=-x+5$.

L'ordenada a l'origen d'aquesta recta és un dels punts intersecció dels dos triangles

$P(0,5)$.

La recta que passa pels punts A, C' té equació:

$y=\frac{9}{4}x$. $y(1)=\frac{9}{4}$.

La recta que passa pels punts A, B té equació:

$y=4x$. $y(1)=4$.

La recta que passa pels punts B', C' té equació:

$y=x+5$. $y(1)=6$.

Notem que B és interior al triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$.

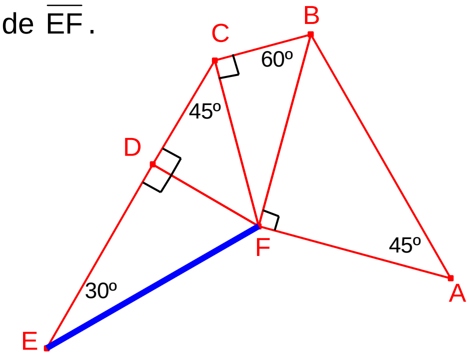
Aleshores, la intersecció dels dos triangles el quadrilàter ABPB' que és un cometa.

$\overline{AP}=5$, $\overline{BB'}=2$.

L'àrea del quadrilàter ABPB' és:

$$S_{ABPB'}=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BB'}}{2}=\frac{5\cdot 2}{2}=5.$$

1446.- En la figura si $\overline{AF} = 12$, determineu la mesura de $\overline{EF}$.



Solució:

$\overline{BF} = \overline{AF} = 12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCF}$:

$$\overline{CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2}12 = 6\sqrt{3} .$$

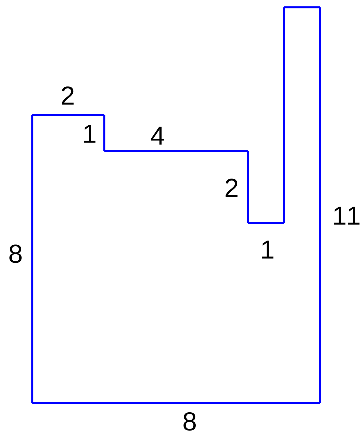
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CFF}$:

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{CF} = \frac{\sqrt{2}}{2}6\sqrt{3} = 3\sqrt{6} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDF}$:

$$\overline{EF} = 2\overline{DF} = 2 \cdot 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6} .$$

1447.- Determineu l'àrea i el perímetre de la figura.



Solució:

Per calcular l'àrea dividim la figura pels rectangles A, B, C, D.

$S_A = 2 \cdot 8 = 16$.

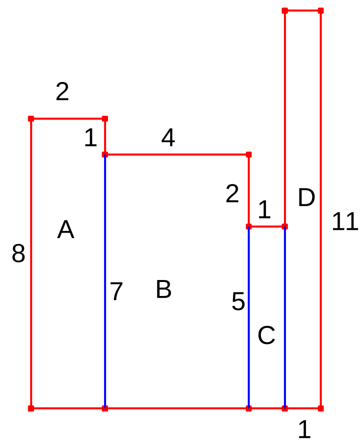
$S_B = 4 \cdot 7 = 28$.

$S_C = 1 \cdot 5 = 5$.

$S_D = 1 \cdot 11 = 11$.

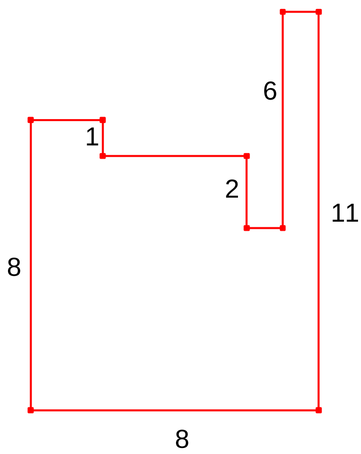
L'àrea de la figura és:

$S = S_A + S_B + S_C + S_D = 16 + 28 + 5 + 11 = 60$.

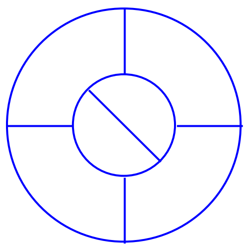


El perímetre és:

$P = 2 \cdot 8 + 8 + 11 + 1 + 2 + 6 = 44$.

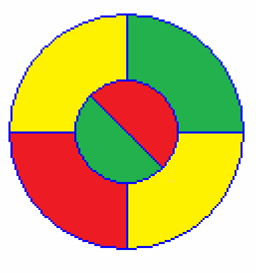


448.- El dibuix està dividit en 6 regions.



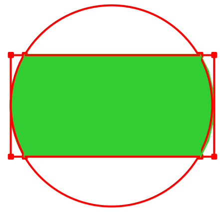
Volem pintar-les de tal manera que dues regions veïnes tinguen distint color.
Quants colors distints ens calen per pintr-lo?

Solució:



Calen 3 colors distints.

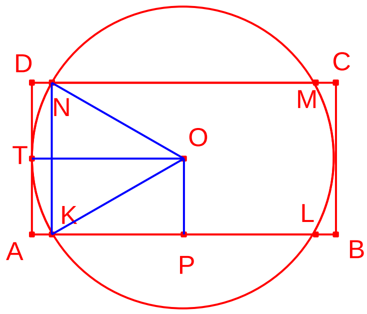
1449.- En la figura, hi ha un rectangle 6×12 i una circumferència, tots dos tenen el mateix centre.



Dos costats del rectangle són tangents a la circumferència.
Calculeu l'àrea de la regió comuna al rectangle i el cercle.

Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=12$, $\overline{AD}=6$.



Siga O el centre del rectangle i de la circumferència.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AD}$.

$\overline{OT}=\frac{1}{2}\overline{AB}=6$.

Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència i els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

$\overline{OK}=\overline{ON}=\overline{OT}=6$.

$\overline{KN}=\overline{AD}=6$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OKN}$ és equilàter, aleshores:

$\angle KON=\angle LOM=60^{\circ}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{AD}=3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:

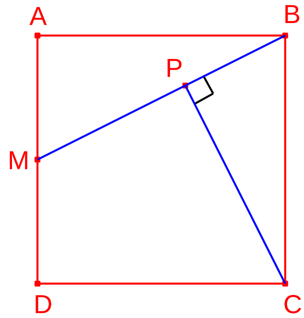
$\overline{KP}=3\sqrt{3}$.

$\overline{KL}=2\overline{KP}=6\sqrt{3}$.

L'àrea ombrejada està formada per dos sectors de radi 6 i 60º i dos triangles de base $6\sqrt{3}$ i altura 3:

$$S=2\left(\frac{1}{6}\pi 6^2\right)+2\left(\frac{12\cdot 3}{2}\right)=12\pi+18\sqrt{3}.$$

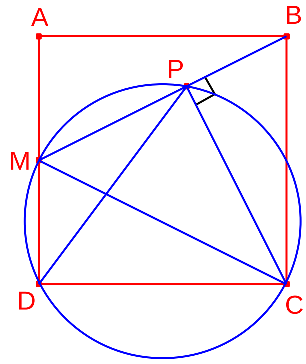
1450.- Siga el quadrat ABCD i siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.



Siga P la projecció de C sobre el segment $\overline{BM}$.
Proveu que $\overline{DP} = \overline{CD}$.

Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

$\overline{AM} = \frac{c}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{BM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{PCB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{PB} = \frac{\sqrt{5}}{5}c$, $\overline{PC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}c$.

$\overline{BM} = \frac{3\sqrt{5}}{10}c$.

Els quadrilàter MPCD és cíclic ja que P=D=90º (angles oposats suplementaris).
Aplicant el teorema de Tolomeu:

$\overline{DM} \cdot \overline{PC} + \overline{PM} \cdot \overline{CD} = \overline{CM} \cdot \overline{DP}$:

$\frac{c}{2}\frac{2\sqrt{5}}{5}c + c\frac{3\sqrt{5}}{10}c = \frac{\sqrt{5}}{2}c \cdot \overline{DP}$. Simplificant:

$\overline{DP} = c = \overline{CD}$.