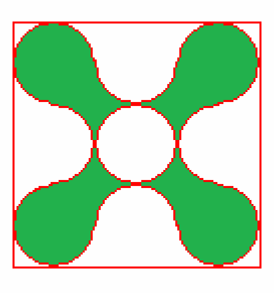
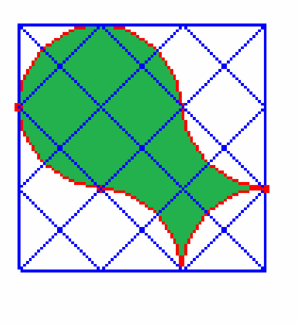
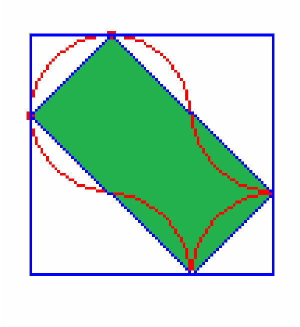
Problemes de Geometria per a l'ESO 146

1451.- Per dissenyar aquest taulell s'ha utilitzar arcs de circumferència d'igual radi que la circumferència central. Determineu la proporció del taulell que està acolorida.



Solució:
La tessel·la mínima és la quarta part del taulell.





La part ombrejada del taulell ocupa $\frac{4}{9}$.

1452.- La figura 1 mostra una rajola en la forma d'un trapezi, on. $\alpha = 83\frac{1}{3}^{o} = 83^{o}20'$ diverses còpies de la rajola es col·loquen juntes per formar un patró simètric, part del qual es mostra a la figura 2. La vora exterior de la forma completa és un polígon estrella regular.

La figura 3 mostra un exemple d'un habitual polígon estrella.

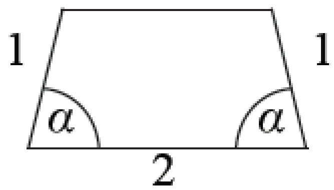


figura 1

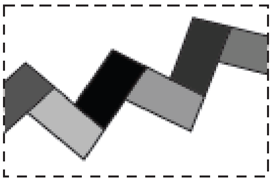


figura 2

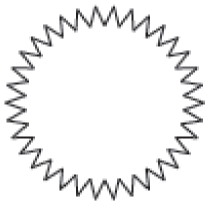
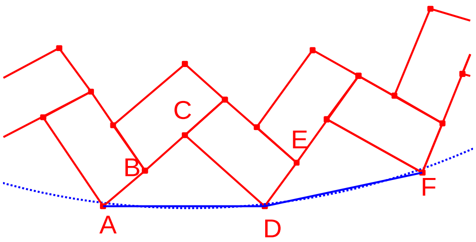


figura 3

Quantes rajoles té el mosaic complet?

Solució:



Siguen $\overline{AD} = \overline{DF}$ costat del polígon regular circumscrit al polígon estrella.

$\overline{AC} = \overline{CD} = 2$, $\angle ACD = 180^{o} - 83\frac{1}{3}^{o} = 96\frac{2}{3}^{o}$.

$\angle CAE = \angle EDF = \frac{1}{2} 83\frac{1}{3}^{o} = 41\frac{2}{3}^{o}$

$\angle CDE = 83\frac{1}{3}^{o}$.

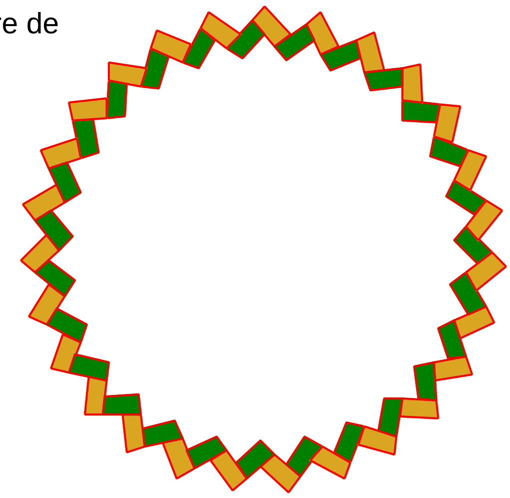
$\angle ADF = 166\frac{2}{3}^{o}$ angle interior del polígon regular circumscrit al polígon estrella.

L'angle central del polígon regular circumscrit al polígon estrella és:

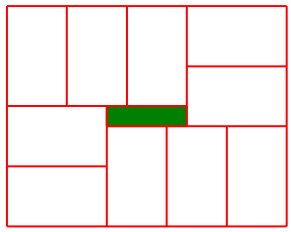
$\frac{360^{o}}{n} = 180^{o} - 166\frac{2}{3}^{o} = 13\frac{1}{3}^{o}$, n és el nombre de costats. Resolent l'equació:

$n = 27$.

Caldran $2 \cdot 27 = 54$ rajoles.



1453.- Amb 10 rectangles iguals de $5\text{cm}\times 3\text{cm}$ hem cobert un gran rectangle però en el centre ha quedat un rectangle menut.



Determineu l'àrea del rectangle menut?.

Concurso Primavera. Madrid 2012.Nivell 2.

Solució:

Siga ABCD el rectangle exterior.

Siga KLMN el rectangle interior.

$\overline{QN}=\overline{AP}=6$. $\overline{QK}=5$.

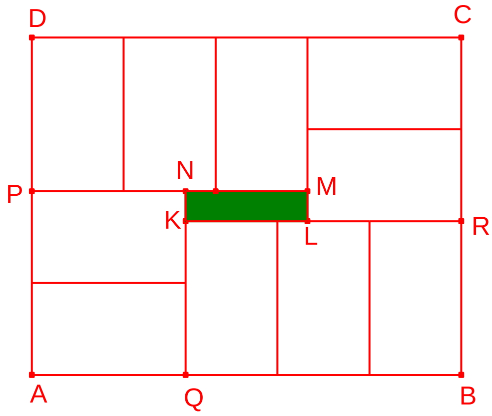
Aleshores, $\overline{KN}=1$.

$\overline{KR}=9$, $\overline{LR}=5$.

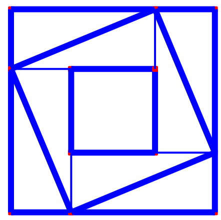
Aleshores, $\overline{KL}=4$.

L'àrea del rectangle KLMN és:

$S_{KLMN}=\overline{KL}\cdot\overline{KN}=4\cdot 1=4\text{cm}^2$.



1454.- Amb vuit triangles rectangles iguals hem construït la figura on es mostren tres quadrats.



El costat del quadrat gran mesura 17cm.
El costat del quadrat menut mesura 7cm.
Quant mesura el costat del quadrat mitjà.
Concurso Primavera. Madrid 2012.Nivell 2.

Solució:

Siga ABCD el quadrat gran de costat $\overline{AB} = \overline{BC} = 17$.

Siga EFGH el quadrat menut de costat $\overline{EF} = 7$.

Siga KLMN el quadrat mitjà.

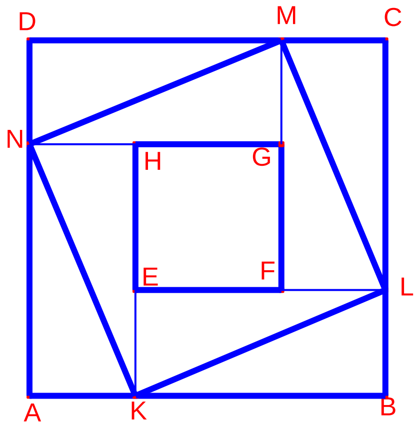
Siga $\overline{GM} = \overline{FL} = \overline{KE} = \overline{BL} = \overline{MC} = x$.

$\overline{LC} = 7 + x$.

$\overline{BC} = x + 7 + x = 17$.

Resolent l'equació:

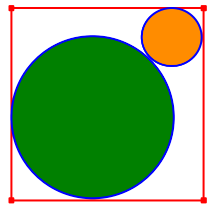
$x = 5$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCL}$:

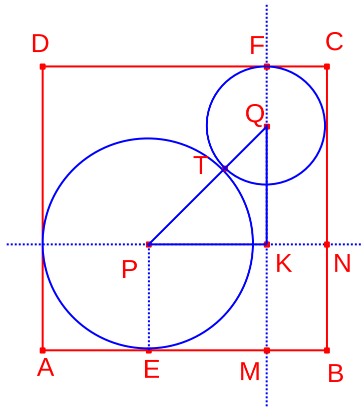
$\overline{ML} = \sqrt{x^2 + (7 + x)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\text{cm}$.

1455.- Dues circumferències són tangents a dos costats d'un quadrat de costat 1 i tangents entre elles, com mostra la figura.



Calculeu la suma dels radis de les dues circumferències.
Concurso Primavera. Madrid 2011.Nivell 4.

Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat 1.
Siga la circumferència de centre P i radi r.
Siga la circumferència de centre Q i radi s.



$\overline{PQ} = r + s$.
Siga la recta PN perpendicular al costat $\overline{BC}$.
Siga la recta QM perpendicular al costat $\overline{AB}$.
Siga K la intersecció de les rectes QM, PN.
$\overline{PK} = \overline{AB} - \overline{AE} - \overline{BM} = 1 - (r + s)$.
$\overline{QK} = \overline{BC} - \overline{PE} - \overline{QF} = 1 - (r + s)$.

El triangle $\overset{\Delta}{PKQ}$ és rectangle i isòsceles. Aplicant el teorema de Pitàgores:
$(r + s)^2 = 2(1 - (r + s))^2$.
$(r + s)^2 - 4(r + s) + 2 = 0$. Resolent l'equació:
$r + s = 2 - \sqrt{2}$.

1456.- Calculeu l'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF si $A(0,0)$, $C(7,1)$.

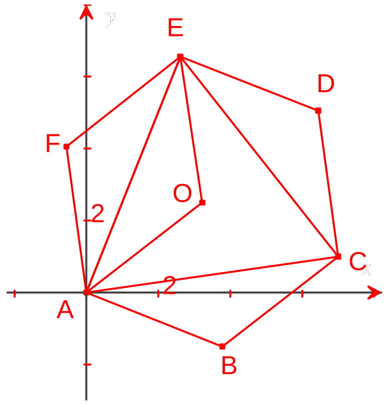
Solució:

L'àrea de l'hexàgon regular és igual al doble del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$.

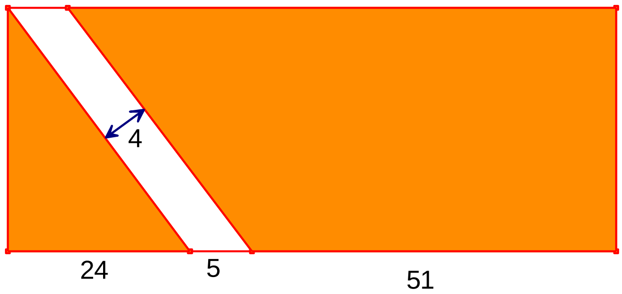
$\overline{AC}=\sqrt{7^2+1^1}=\sqrt{50}$.

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és:

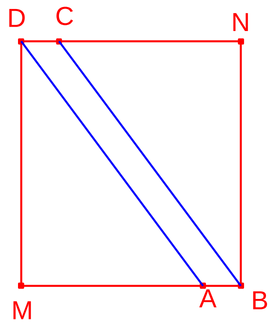
$$S_{ABCDEF}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AC}^2\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{50}\right)^2\right)=25\sqrt{3}.$$



1457.- Una carretera de 4 m d'ampla travessa com indica la figura una plantació de gira-sols. Quants m^2 de plantació s'han perdut com a conseqüència de la carretera.

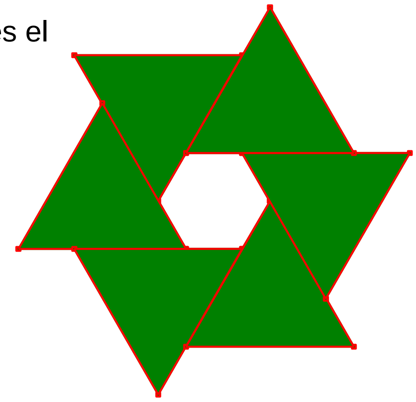


Solució:
Siga ABCD el paral·lelogram que ocupa la carretera.
Siga $\overline{MD} = x$ l'amplada del camp de gira-sols.

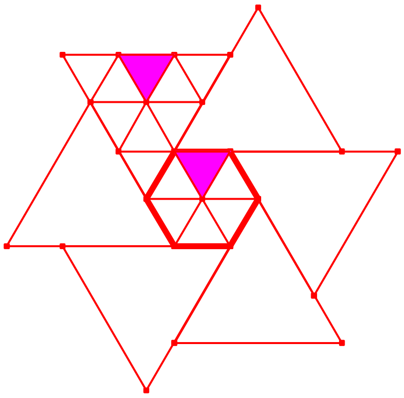


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAD}$:
$\overline{AD} = \sqrt{24^2 + x^2}$.
L'àrea del paral·lelogram ABCD és:
$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{MD} = \overline{AD} \cdot 4$.
$5x = \sqrt{24^2 + x^2} \cdot 4$. Resolent l'equació:
$x = 32$.
L'àrea del paral·lelogram ABCD és:
$S_{ABCD} = 5x = 5 \cdot 32 = 160m^2$.

1458.- El costat de cadascun dels triangles equilàters de la figura és el triple del costat de l'hexàgon regular del centre.
Determineu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon i la suma de les àrees dels 6 triangles equilàters.



Solució:



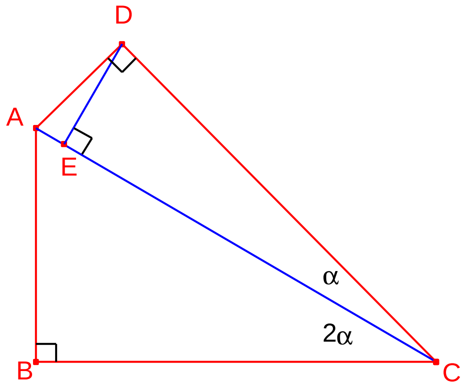
L'hexàgon està format per 6 triangles equilàters menuts.
La suma dels 6 triangles equilàter grans està format per 48 triangles equilàters menuts.
La proporció és:

$$\frac{S_{hexàgon}}{S_{6Triangles}} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}.$$

1459.- En la figura $\angle ABC = \angle ADC = \angle DEC = 90º$,

$\angle ACD = \alpha$, $\angle ACB = 2\alpha$.

Proveu que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{DE}$



Solució 1:

$\angle ADE = \angle ACD = \alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha .$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$: $\sin\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$: $\cos\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$..

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} .$$

$$\overline{AB} = 2\overline{DE} \cdot \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AC}}{\overline{AD}^2} .$$

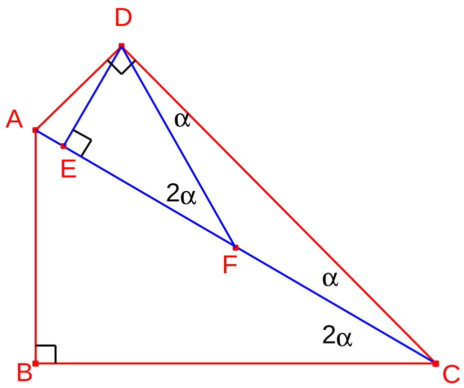
Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{AD}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{AC}$.

Aleshores, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{DE}$.

Solució 2:

Siga F el punt mig del segment $\overline{AC}$.



$\overline{DF}$ és la mitjana del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

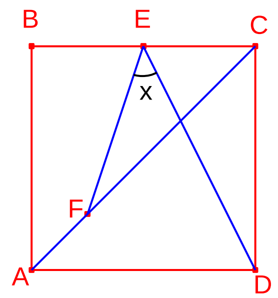
$\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\angle FDC = \alpha$.

Aleshores, $\angle AFD = 2\alpha$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{2 \cdot \overline{DF}} = \frac{1}{2} .$$



1460.- En la figura, ABCD és un quadrat.

E és el punt mig de costat $\overline{BC}$.

F és de la diagonal $\overline{AC}$, tal que, $\overline{CF} = 3 \cdot \overline{AF}$.

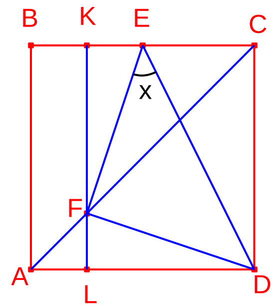
Determineu la mesura de l'angle $x = \angle DEF$.

Solució:

Siguen K, L les projeccions de F sobre els costats $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, respectivament.

Els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{ALF}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són semblant i de raó 1:4.

Aplicant el teorema de Tales:



$$\overline{AL} = \overline{BK} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

$$\overline{AL} = \overline{LF} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

$$\overline{DL} = \overline{FK} = \frac{3}{4}\overline{AB}.$$

$$\overline{KE} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EKF}$, $\overset{\Delta}{FLD}$ són iguals.

$\overline{FE} = \overline{FD}$, $\angle EFD = 180^\circ - (\angle KFE + \angle LFD) = 90^\circ$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{EFD}$ és rectangle i isòscles.

$x = \angle DEF = 45^\circ$.