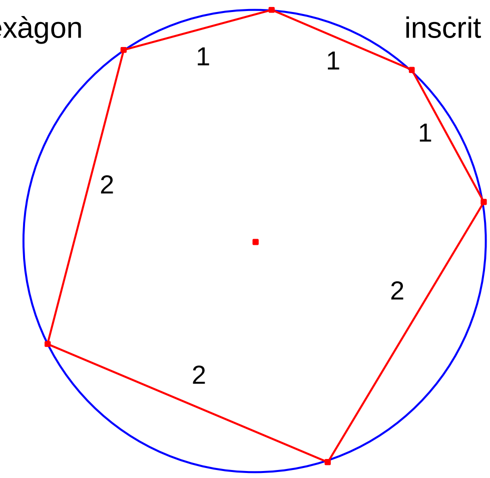
Problemes de Geometria per a l’ESO 147

1461.- Calculeu l’àrea d’un cercle tal que té un hexàgon inscrit de costats consecutius 1, 1, 1, 2, 2, 2.



Solució:

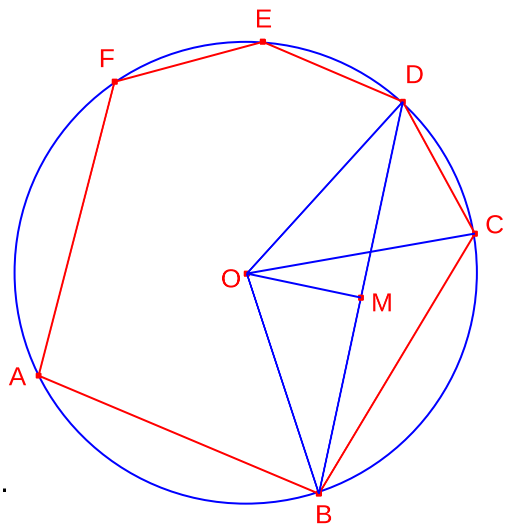
Siga ABCDEF l’hexàgon inscrit en la circumferència de centre O i radi r.

Siga $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle COB$.

$3\alpha + 3\beta = 360º$.

$\alpha + \beta = 120º$.

$\angle BCD = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) = 120º$ (per ser angle inscrit en la circumferència).



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos a20º = 7$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{BD}$.

El triangle $\overset{\Delta}{BDO}$ és isòsceles, $\angle OBD = \frac{180º - (\alpha + \beta)}{2} = 30º$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:

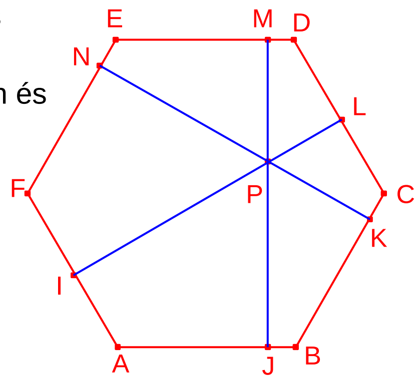
$\cos 30º = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{r}$. Resolent l’equació:

$r = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

L’àrea del cercle de centre O és:

$S = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2 = \frac{7\pi}{3} \approx 7.33$.

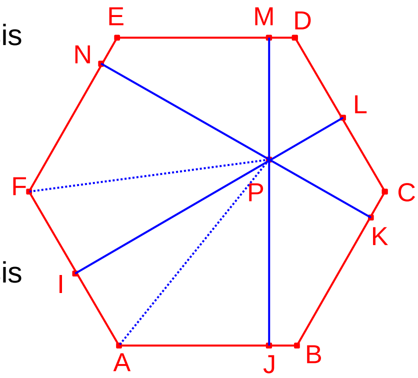
1462.- Donat un punt interior a l'hexàgon regular la suma de les distàncies als costats és constant.
Calculeu la suma d'aquestes distàncies si el costat de l'hexàgon és c.
Generalitzeu el resultat per a un polígon regular de n costats.



Solució:

Siguen $h_1 = \overline{PI}$, $h_2 = \overline{PJ}$, $h_3 = \overline{PK}$, $h_4 = \overline{PL}$, $h_5 = \overline{PM}$, $h_6 = \overline{PN}$ les distàncies del punt P als sis costats del triangle.

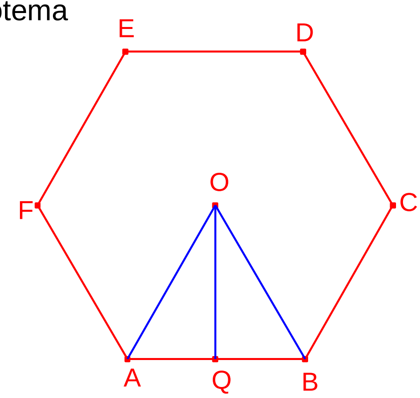
L'àrea de l'hexàgon regular és igual a la suma de les àrees dels sis triangles que forma el punt P i el vèrtex de l'hexàgon regular:



$$S_{ABCDEF} = \frac{1}{2}c(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6).$$

Siga O el centre de l'hexàgon regular.
L'àrea de l'hexàgon regular és igual a la suma de les àrees dels sis triangles equilàters que forma el centre de l'hexàgon amb els vèrtexs de l'hexàgon.
Siga Q el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQO}$, l'apotema de l'hexàgon regular és $\overline{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.



L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{ABO} = 6\left(\frac{1}{2}c\frac{\sqrt{3}}{2}c\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

Igualant les àrees:

$$S_{ABCDEF} = \frac{1}{2}c(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 3\sqrt{3}c.$$

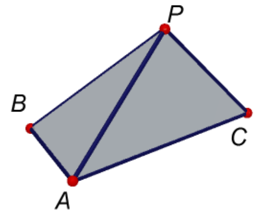
La suma d'aquestes distàncies del punt P als costats és constant.

Generalització:

Siga un polígon regular de n costats. Siga P un punt interior al polígon.
Siga c el seu costat.
La suma de les distància de P als costats és:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots\ldots + h_n = \frac{n}{2\mathrm{tg}\frac{180^o}{n}}c.$$

1463.- Siga el tetraedre ABCP tal que $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 10$.



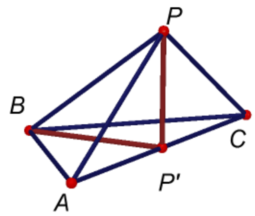
Els angles entre $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ amb el plànol del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesuren 60º.
Determineu el volum del tetraedre ABCP.

Solució:

Siga P' la projecció de P sobre el plànol del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\angle PAP' = \angle PBP' = \angle PCP' = 60º$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PAP'}, \overset{\Delta}{PBP'}, \overset{\Delta}{PCP'}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{P'A} = \overline{P'B} = \overline{P'C}$. Aleshores, P' és el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



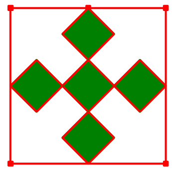
$\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle, el seu circumcentre és el punt mig de la hipotenusa.
Aleshores P' és el punt mig del segment $\overline{AC}$.
$\overline{BP'} = \overline{P'A} = 5$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BP'P}$:
$\overline{PP'} = 5tg60º = 5\sqrt{3}$, altura del tetraedre..
El volum del tetraedre ABCP és:

$$V_{ABCP} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{PP'}$$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} 6 \cdot 8 \cdot 5\sqrt{3} = 40\sqrt{3} \approx 69.28 .$$

1464.- Dins d'un quadrat s'han dibuixat 5 quadrats (veure figura).



Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels 5 quadrats interiors i la del quadrat exterior.

Solució 1:

Siga ABCD el quadrat el exterior de costat $\overline{AB} = c$.

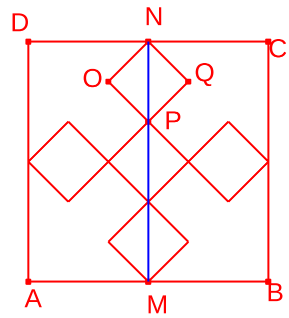
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$\overline{MN} = c$.

Siga NOPQ un dels cinc quadrats interiors.

Siga $\overline{NO} = \overline{OP} = x$ costats del quadrat.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NOP}$:

$\overline{NP} = x\sqrt{2}$.

$\overline{MN} = 3\overline{NP} = 3x\sqrt{2}$.

Aleshores, $c = 3x\sqrt{2}$.

$x^2 = \frac{1}{18}c^2$.

La suma de les àrees dels 5 quadrats interiors és:

$S_5 = 5 \cdot x^2 = \frac{5}{18}c^2$.

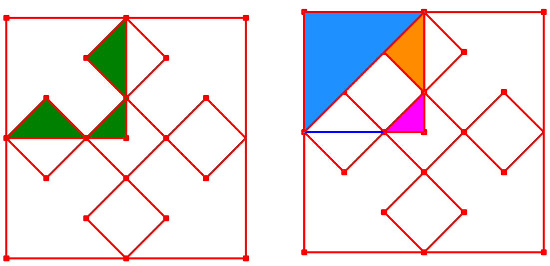
L'àrea del quadrat ABCD és:

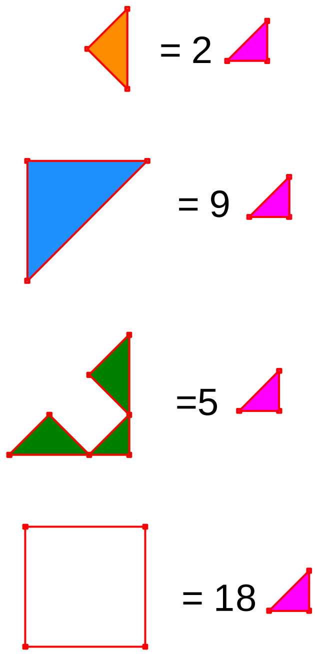
$S_{ABCD} = c^2$.

La proporció entre les àrees de la suma dels 5 quadrats interiors i la del quadrat exterior és:

$$\frac{S_5}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{18}c^2}{c^2} = \frac{5}{18} .$$

Solució 2:

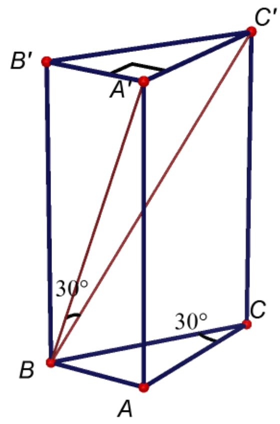




La proporció entre les àrees de la suma dels 5 quadrats interiors i la del quadrat exterior és:

$$\frac{S_5}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{5}{18}c^2}{c^2} = \frac{5}{18} .$$

1465.- Siga ABCA'B'C' un prisma triangular recte tal que $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle ACB = 30^\circ$, $\angle A'BC' = 30^\circ$.
Calculeu el volum del prisma.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$.

Siga $\overline{AA'} = h$ altura del prisma.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCC'}$:

$\overline{BC'}^2 = h^2 + 64$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAA'}$:

$\overline{BA'}^2 = h^2 + 16$.

Aplicant el teorema del cosinus $\overset{\Delta}{A'BC'}$:

$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + 64 + h^2 + 16 - 2\sqrt{h^2 + 64}\sqrt{h^2 + 16}\cos 30^\circ$.

$\sqrt{h^2 + 64}\sqrt{h^2 + 16}\cos 30^\circ = h^2 + 16$. Elevant al quadrat:

$h^4 - 112h^2 - 2048 = 0$. Resolent l'equació:

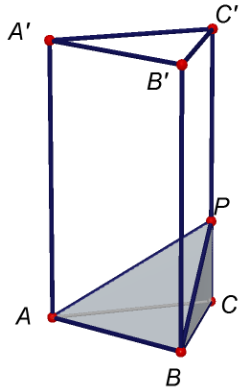
$h = 8\sqrt{2}$.

El volum del prisma és:

$$V = \frac{1}{2} 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{2} \approx 64\sqrt{6} \approx 156.77\text{cm}^3.$$

1466.- En un prisma triangular regular ABCA’B’C’ l’aresta de la base és 6 i l’altura 10, es dibuixa un plànol que passa per l’aresta $\overline{AB}$ i forma un angle de 30º amb la base.

Determineu l’àrea de la secció que determina el plànol. Determineu la proporció entre el tetraedre que determina la secció i el volum del prisma.



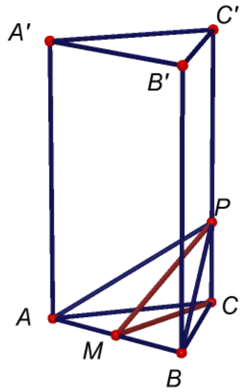
Solució:

La secció que determina el plànol en el prisma és el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABP}$, P en l’aresta $\overline{CC'}$.

Siga M el punt mig de l’aresta $\overline{AB}$.

L’angle que forma la secció i la base és:

$\angle PMC = 30º$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{MC} = 3\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCP}$:

$\overline{MP} = 6$, $\overline{PC} = 3$.

L’àrea de la secció és:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} 6 \cdot 6 = 18.$$

El volum del prisma és:

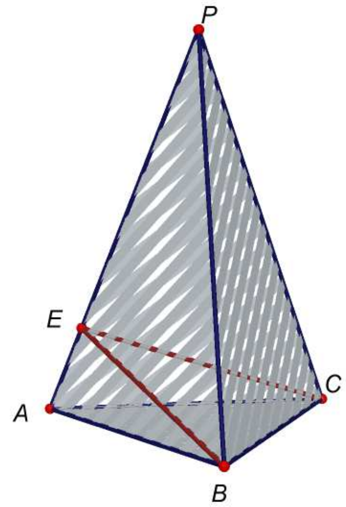
$V_{Prisma} = S_{ABC} \cdot 10$.

El volum del tetraedre ABCP és:

$$V_{Tetraedre} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{PC} = S_{ABC}.$$

La proporció entre els volums del tetraedre i el prisma és:

$$\frac{V_{Tetraedre}}{V_{Prisma}} = \frac{S_{ABC}}{10 \cdot S_{ABC}} = \frac{1}{10}.$$



1467.- Siga ABCP una piràmide triangular regular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ d'aresta $\overline{AB}=5$.

L'aresta $\overline{AP}$ és perpendicular al plànol BEC i $\frac{\overline{PE}}{\overline{AE}}=\frac{7}{2}$.

Calculeu l'àrea total de la piràmide.

Solució:

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Siga $\overline{PE}=7x$, $\overline{AE}=2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

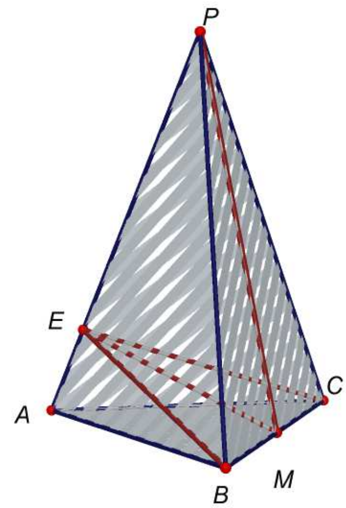
$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}5$.

El triangle $\overset{\Delta}{PEM}$ és rectangle, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{PM}^2=\overline{ME}^2+(7x)^2 \qquad (1)$$

El triangle $\overset{\Delta}{AEM}$ és rectangle, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}5\right)^2=\overline{ME}^2+(2x)^2 \qquad (2)$$



El triangle $\overset{\Delta}{BMP}$ és rectangle, aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{PM}^2=(9x)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

De l'expressió (2):

$$\overline{ME}^2=\frac{75}{4}-4x^2 \qquad (4)$$

Substituïm l'expressió (4) en l'expressió (1):

$$\overline{PM}^2-45x^2=\frac{75}{4} \qquad (5)$$

Considerem el sistema format per les expressions (3) i (5)

$\begin{cases}\overline{PM}^2-45x^2=\frac{75}{4}\\ \overline{PM}^2-81x^2=-\frac{25}{4}\end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases}\overline{PM}^2=50\\ x^2=\frac{25}{36}\end{cases}$.

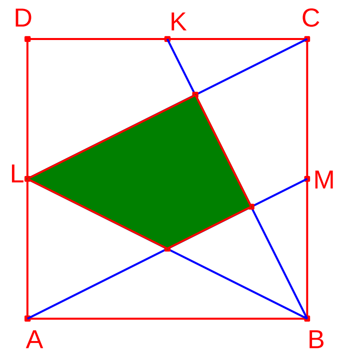
Aleshores, $\overline{PM}=\sqrt{50}$.

L'àrea de la piràmide és:

$$S_{ABCP}=S_{ABC}+3\cdot S_{BCP}=\frac{\sqrt{3}}{4}5^2+3\left(\frac{1}{2}5\cdot\sqrt{50}\right)=\frac{25\sqrt{3}+150\sqrt{2}}{4}\approx 63.86.$$

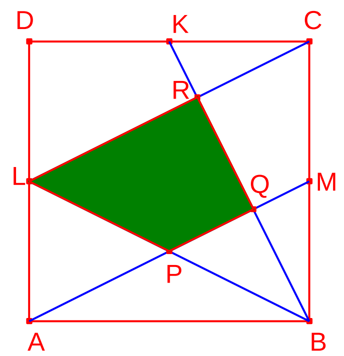
1468.- En el quadrat ABCD s'ha dibuixat els punts migs K, L, M dels costats $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, respectivament.

Determineu la proporció entre l'àrea de la regió afitada pels segments $\overline{AM}$, $\overline{BL}$, $\overline{CL}$ i l'àrea del quadrat ABCD. (Veure figura).



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCK}$:

$$\overline{BK} = \frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCK}$, $\overset{\Delta}{CDL}$ són iguals i a més a més:

$$S_{BCK} = S_{CDL} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Siga PQRL la regió afitada pels tres segments $\overline{AM}$, $\overline{BL}$, $\overline{CL}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDL}$, $\overset{\Delta}{BCK}$ són iguals i tenen els catets corresponents perpendiculars aleshores, $\overline{CL}$ i $\overline{BK}$ són perpendiculars.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCK}$, $\overset{\Delta}{BRC}$ són semblants. Les seues àrees són proporcionals al quadrat de la proporció dels costats corresponents:

$$\frac{S_{BRC}}{S_{BCK}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{BK}}\right)^2 = \frac{4}{5}.$$

$$S_{BRC} = \frac{4}{5}S_{BCK} = \frac{4}{5}\frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{5}S_{ABCD}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQB}$, $\overset{\Delta}{BRC}$ són iguals.

P és la intersecció de les diagonals del rectangle ABML.

$$S_{APL} = \frac{1}{4}S_{ABML} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{8}S_{ABCD}.$$

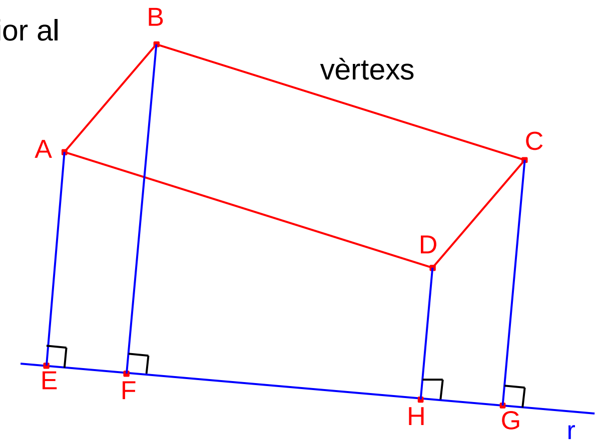
L'àrea de la regió PQRL és:

$$S_{PQRL} = S_{ABCD} - (S_{CDL} + 2\cdot S_{BRC} + S_{APL}) = \left(1 - \left(\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right)\right)S_{ABCD} = \frac{9}{40}S_{ABCD}.$$

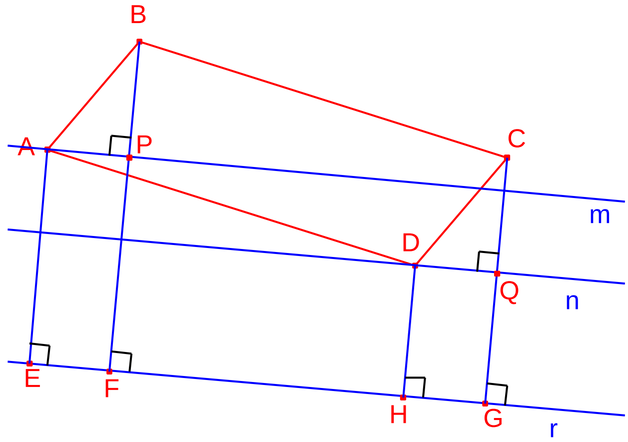
$$\frac{S_{PQRL}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{40}.$$

1469.- Donat el paral·lelogram ABCD i la recta r exterior al paral·lelogram, siguen E, F, G i H les projeccions dels vèrtexs A, B, C i D, respectivament.

Proveu que $\overline{BF}+\overline{DH}=\overline{AE}+\overline{CG}$.



Solució:
Dibuixem les rectes m, n paral·leles a la recta r que passen per A i D, respectivament.
La recta m talla la recta BF en el punt P.
La recta n talla la recta CG en el punt Q.
AEFP, HGQD són rectangles, aleshores,



$\overline{AE}=\overline{PF}$, $\overline{DH}=\overline{GQ}$.

$\angle APB=\angle DQC=90º$.

$\angle BAP=\angle CDQ$, $\overline{AB}=\overline{CD}$.

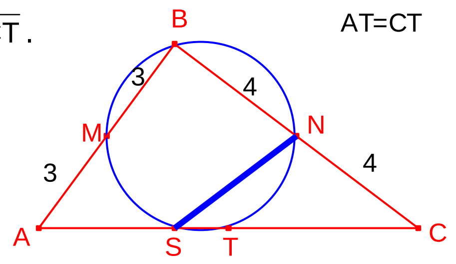
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{DQC}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{BP}=\overline{CQ}$.

$\overline{BF}+\overline{DH}=\overline{BP}+\overline{PF}+\overline{DH}=\overline{CG}+\overline{AE}+\overline{GQ}=\overline{AE}+\overline{CG}$.

1470.- En la figura $\overline{AM} = \overline{BM} = 3$, $\overline{BN} = \overline{CN} = 4$, $\overline{AT} = \overline{CT}$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{SN}$.



Solució:

Aplicant el teorema invers del teorema de Tales, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{TNC}$ són semblants, aleshores:

$\overline{TN}$ és paral·lel a $\overline{AB}$, $\overline{TN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Tales, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AMT}$ són semblants, aleshores:

$\overline{MT}$ és paral·lel a $\overline{BC}$, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 4$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Tales, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{MBN}$ són semblants, aleshores:

$\overline{MN}$ és paral·lel a $\overline{AC}$.

$\overline{MN}$ és paral·lel a $\overline{ST}$.

Aleshores, $\overline{MS} = \overline{TN}$. El quadrilàter MNTS és un trapezi isòsceles, aleshores, les seues diagonals són iguals.

$\overline{NS} = \overline{MT} = 4$.

Nota: el quadrilàter BNTM és un paral·lelogram inscrit en una circumferència, aleshores, és un rectangle.