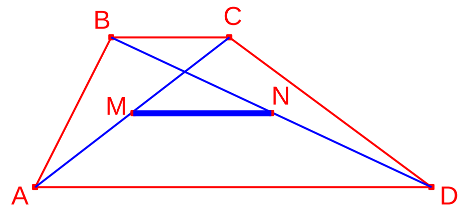
Problemes de Geometria per a l'ESO 148

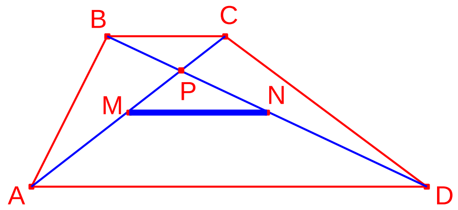


1471.- Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AD}=a$, $\overline{BC}=b$, $a>b$.

Siguen M i N els punts migs de les diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, respectivament.

Calculeu la mesura del segment $\overline{MN}$.

Solució 1:
M, N pertanyen a la paral·lela mitjana del trapezi.
Siga P la intersecció de les dues diagonals del trapezi.



Els triangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{CBP}$ són semblant.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}=\frac{b}{a}$. Aleshores: $\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}=\frac{b}{a+b}$.

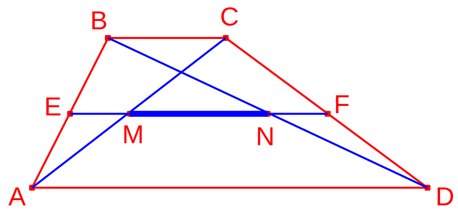
$$\overline{MP}=\overline{MC}-\overline{AC}=\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{a+b}\right)\overline{AC}=\frac{a-b}{2(a+b)}\overline{AC}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{MNP}$, $\overset{\Delta}{CBP}$ són semblant. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{MN}}{b}=\frac{\overline{PM}}{\overline{PC}}$. $\frac{\overline{MN}}{b}=\frac{\frac{a-b}{2(a+b)}}{\frac{b}{a+b}}=\frac{a-b}{2b}$. Aleshores:

$$\overline{MN}=\frac{a-b}{2}.$$

Solució 2:



Siguen E, F els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ del trapezi.

M, N pertanyen a la paral·lela mitjana $\overline{EF}$ del trapezi.

$$\overline{EF}=\frac{a+b}{2}.$$

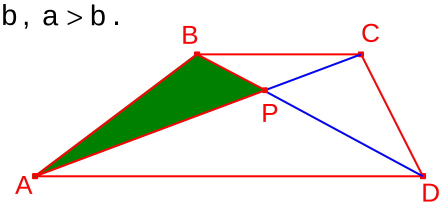
Els triangles $\overset{\Delta}{AEM}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblant i de raó 1:2. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{EM}=\frac{1}{2}b$. Anàlogament:

$\overline{FN}=\frac{1}{2}b$.

$$\overline{MN}=\overline{EF}-2\cdot\overline{EM}=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}.$$

1472.- Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AD}=a$, $\overline{BC}=b$, $a>b$.



Siga P la intersecció de les diagonals $\overline{AC}$, $\overline{BD}$.

Calculeu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ i el trapezi ABCD.

Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{CBP}$ i la raó és a:b.

Aleshores, $\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}=\frac{b}{a}$, $\frac{\overline{DP}}{\overline{BP}}=\frac{a}{b}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les altures.

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{PCB}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{PCB}}{S_{APB}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}=\frac{b}{a}.$$

$$S_{PCB}=\frac{b}{a}S_{APB}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{APD}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{APD}}{S_{APB}}=\frac{\overline{DP}}{\overline{BP}}=\frac{a}{b}.$$

$$S_{APD}=\frac{a}{b}S_{APB}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{PCD}$, $\overset{\Delta}{APD}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{S_{PCD}}{S_{APD}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}}=\frac{b}{a}.$$

$$S_{PCD}=\frac{b}{a}S_{APD}=\frac{b}{a}\frac{a}{b}S_{APB}.$$

$$S_{PCD}=S_{APB}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

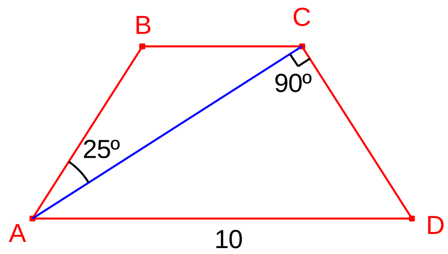
$$S_{ABCD}=2\cdot S_{APB}+S_{PCB}+S_{APD}=\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)S_{APB}.$$

$$S_{ABCD}=\frac{(a+b)^2}{ab}S_{APB}.$$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ i el trapezi ABCD és:

$$\frac{S_{APB}}{S_{ABCD}}=\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

1473.- Siga ABCD el trapezi isòsceles de costats paral·lels $\overline{AD} = 10$ i $\overline{BC}$.

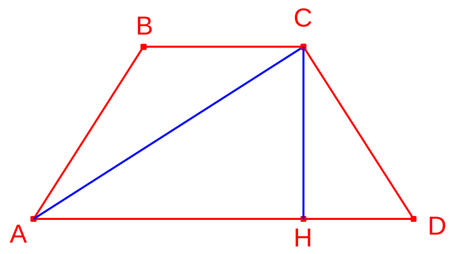


Siga $\angle BAC = 25^{o}$, $\angle ACD = 90^{o}$.
Determineu l'àrea del trapezi ABCD.

Solució:
Siga $\alpha = \angle DAC$. Aleshores, $\angle ACB = \alpha$.
Siga $x = \overline{BC}$, $y = \overline{AB} = \overline{CD}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\sin\alpha = \frac{y}{10}.$$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{x}{\sin 25^{o}} = \frac{y}{\sin\alpha}.$$

$$\frac{x}{\sin 25^{o}} = \frac{y}{\frac{y}{10}}.$$

Aleshores, $x = 10\sin 25^{o}$.
Siga $\overline{CH} = h$ altura del trapezi.

$$\overline{HD} = \frac{10-x}{2} = 5 - \frac{x}{2}.$$

$$\overline{AH} = 5 + \frac{x}{2}.$$

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

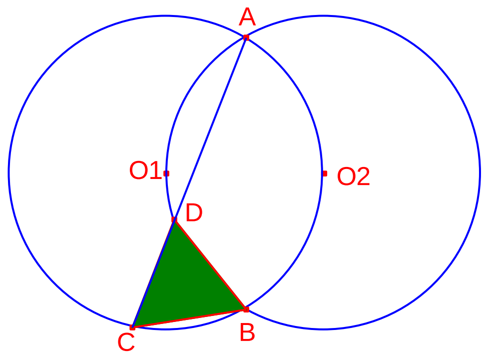
$$\overline{CH}^{2} = \overline{HD}\cdot\overline{AH} = \left(5-\frac{x}{2}\right)\left(5+\frac{x}{2}\right) = 25 - \frac{x^{2}}{4}.$$

$$\overline{CH} = \sqrt{25 - \frac{x^{2}}{4}} = 5\cos 25^{o}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{10+x}{2}\overline{CH} = \frac{10+10\sin 25^{o}}{2}5\cdot\cos 25^{o} \approx 32.23.$$

1474.- En la figura, proveu que el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és equilàter.



Solució:

L'angle $\angle ACB$ és inscrit en la circumferència de centre O_1 i abraça un arc de 120º, aleshores:

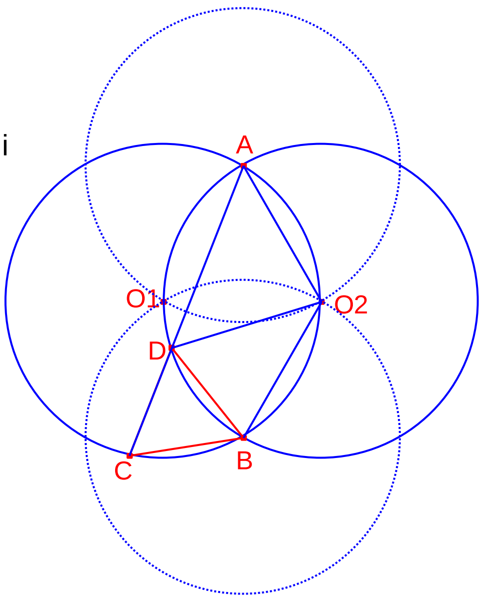
$\angle ACB = 60º$.

L'angle $\angle ADB$ és inscrit en la circumferència de centre O_2 i abraça un arc de 240º, aleshores:

$\angle ADB = 120º$.

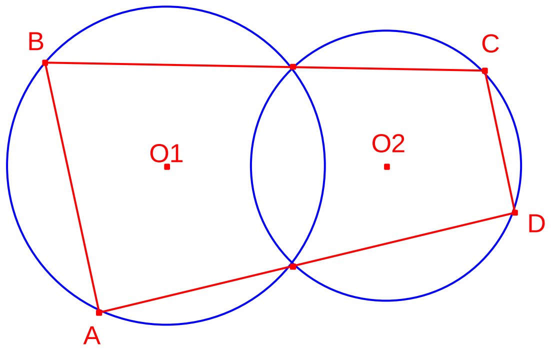
$\angle CDB = 180º - \angle ADB = 60º$.

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ té tots els angles iguals a 60º, per tant, és equilàter.

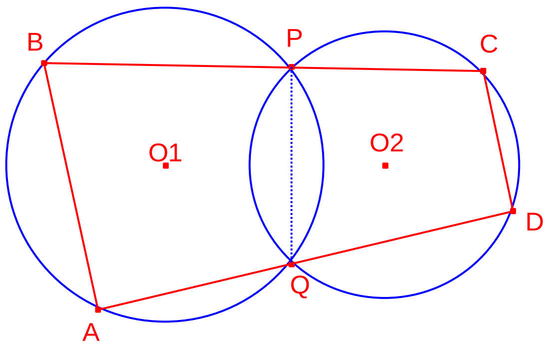


1475- En la figura, demostreu que els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ del quadrilàter ABCD són paral·lels.

(Els costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ passen pels punts intersecció de les circumferències)



Solució:



Els angles oposats d'un quadrilàter inscrit en una circumferència són suplementaris.
Siguen P i Q la intersecció de les dues circumferències.
El quadrilàter ABPQ està inscrit en la circumferència de centre O_1.

$\angle AQP = 180^{o} - B$.

$\angle DQP = B$.

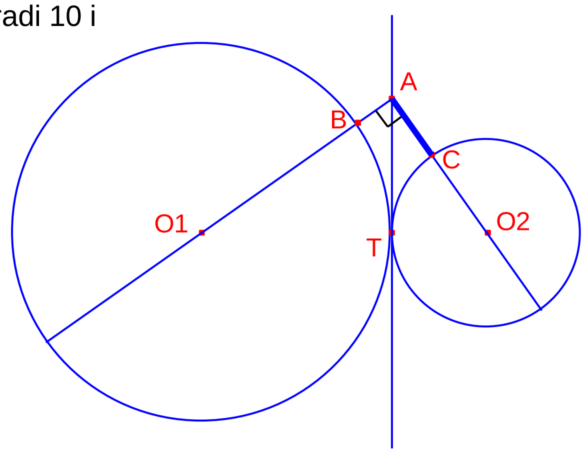
El quadrilàter QPCD està inscrit en la circumferència de centre O_2.

$\angle PCD = 180^{o} - \angle DQP = B$.

Aleshores, els angles B i C del quadrilàter ABCD són suplementaris, aleshores, els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ del quadrilàter ABCD són paral·lels.

1476.- En la figura, les circumferències de centre O_1 i radi 10 i centre O_2 i radi 5, són tangents exteriors en el punt T.

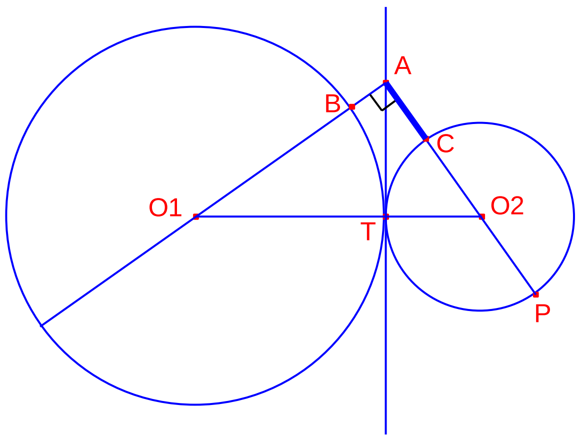
$\angle O_1AO_2 = 90^o$ i A pertany a la recta tangent a les dues circumferències.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AC}$.



Solució:
$\overline{AT}$ és perpendicular a la recta que passa pels centres de les dues circumferències.
Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle

$O_1\overset{\Delta}{A}O_2$:

$\overline{AT}^2 = \overline{O_1T} \cdot \overline{O_2T} = 10 \cdot 5 = 50$.



Siga $x = \overline{AC}$.
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència de centre O_2 :

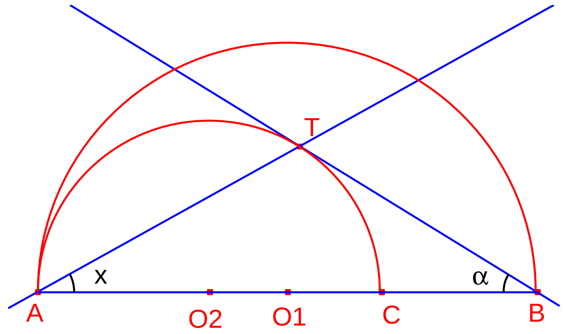
$\overline{AC} \cdot \overline{AP} = \overline{AT}^2$.

$x(x+10) = 50$.

Resolent l'equació:

$x = 5\left(-1+\sqrt{3}\right) \approx 3.36$.

1477.- Siga la semicircumferència de centre O_1 i diàmetre $\overline{AB}$.



Siga la semicircumferència de centre O_2 i diàmetre $\overline{AC}$.
Siga BT la recta tangent a la semicircumferència de centre O_2 (T el punt de tangència).
Si $\alpha = \angle ABT$, calculeu la mesura de l'angle $x = \angle BAT$.

Solució:

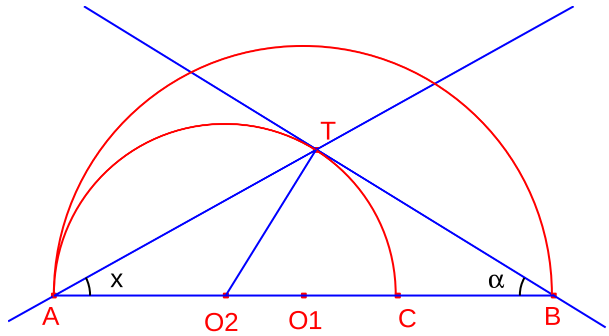
$\angle O_2TB = 90^{o}$.

$\angle TO_2B = 90^{o} - \alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{AO_2T}$ és isòsceles.

$2x = \angle TO_2B$.

$x = \dfrac{\angle TO_2B}{2} 45^{o} - \dfrac{\alpha}{2}$.

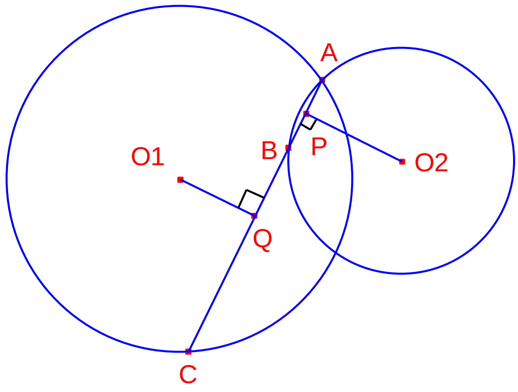


1478.- En la figura, $\overline{AC} = 8$, $\overline{AB} = 2$.

P és la projecció de O_2 sobre $\overline{AC}$.

Q és la projecció de O_1 sobre $\overline{AC}$.

Determineu la mesura del segment $\overline{PQ}$.



Solució:

P és el punt mig de la corda $\overline{AB}$ de la circumferència de centre O_2.

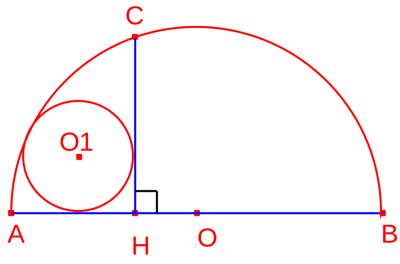
$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 1$$

Q és el punt mig de la corda $\overline{AC}$ de la circumferència de centre O_1.

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 4$$

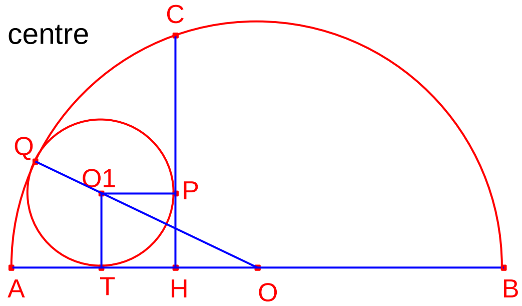
$$\overline{PQ} = \overline{AQ} - \overline{AP} = 4 - 1 = 3.$$

1479.- En la figura, $\overline{AH} = 2a$, $\overline{OH} = a$.



$\overline{CH}$ és perpendicular al diàmetre $\overline{AB}$ de la semicircumferència.
La circumferència de centre O_1 és tangent al diàmetre $\overline{AB}$ al segment $\overline{CH}$ i a la semicircumferència.
Determineu el radi de la circumferència de centre O_1.

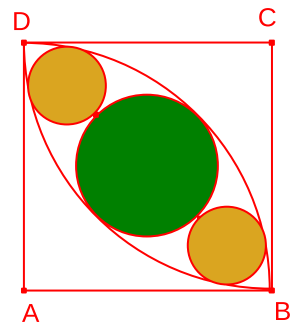
Solució:
$\overline{OA} = 3a$ radi de la semicircumferència.
Siguen P, Q, T els punts de tangència de la circumferència de centre O_1.



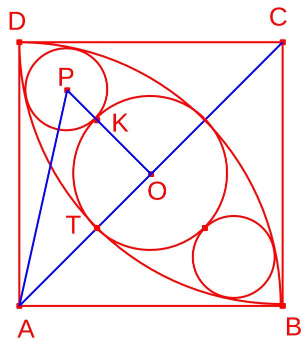
Siga $r = \overline{O_1P} = \overline{O_1Q} = \overline{O_1T}$ radi de la circumferència de centre O_1.
$\overline{TH} = r$, $\overline{OO_1} = 3a - r$.
$\overline{OT} = a + r$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTO_1}$:
$(3a - r)^2 = r^2 + (a + r)^2$. Simplificant:
$r^2 + 8ar - 8a^2 = 0$. Resolent l'equació:
$r = \left(-4 + 2\sqrt{6}\right)a$.

1480.- Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Determineu el radi de les tres circumferències de la figura.



Solució:
Siga O el centre del quadrat ABCD i centre de la circumferència.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el quadrat de centre C.



$\overline{CT}=c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$\overline{CO}=\overline{AO}=\frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

El radi de la circumferència és:

$$r=\overline{OT}=\overline{CT}-\overline{CO}=c-\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{2-\sqrt{2}}{2}c.$$

Siga P el centre de la circumferència superior.
Siga K el punt de tangència de la circumferència central i la superior.
Siga $s=\overline{PK}$ radi de la circumferència superior.

$$\overline{OP}=r+s=s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}c.$$

$$\overline{AP}=c-s.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$

$$(c-s)^2=\left(s+\frac{2-\sqrt{2}}{2}c\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2.$$

$\left(4-\sqrt{2}\right)cs=\left(\sqrt{2}-1\right)c^2$ Resolent l'equació:

$$s=\frac{-2+3\sqrt{2}}{14}c.$$