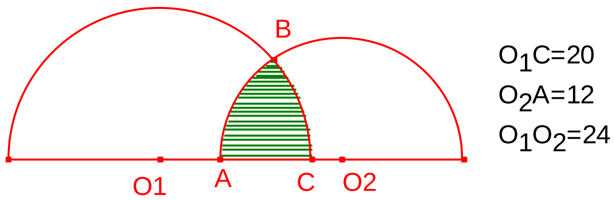
Problemes de Geometria per a l'ESO 149

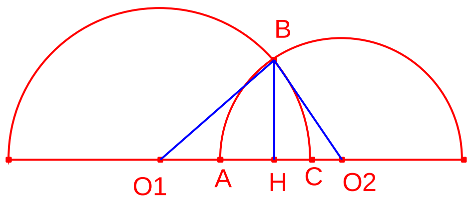
1481.- Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Siga $\alpha = \angle O_1O_2B$, $\beta = \angle O_2O_1B$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2B}$:



$20^2 = 12^2 + 24^2 - 2 \cdot 12 \cdot 24 \cdot \cos\alpha$.

$\cos\alpha = \frac{5}{9}$. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{14}}{9}$.

$12^2 = 20^2 + 24^2 - 2 \cdot 20 \cdot 24 \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{13}{15}$.

Siga H la projecció de B sobre el segment $\overline{AC}$.

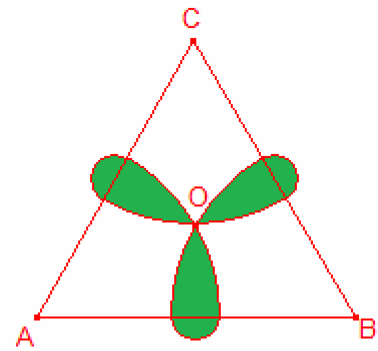
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHO_2}$:

$\overline{BH} = 12\sin\alpha = \frac{8\sqrt{14}}{3}$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del sector de centre O_2 i angle α més l'àrea del sector de centre O_1 i angle β menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2B}$:

$$S_{ombrejada} = \left(\pi 20^2 \frac{\arccos\frac{13}{15}}{360^o} \right) + \left(\pi 12^2 \frac{\arccos\frac{5}{9}}{360^o} \right) + \left(\frac{1}{2} 24 \frac{8\sqrt{14}}{3} \right) \approx 55.42 .$$

1482.- En la figura, a partir d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$, s'han dibuixat tres arc i tres semicircumferències.



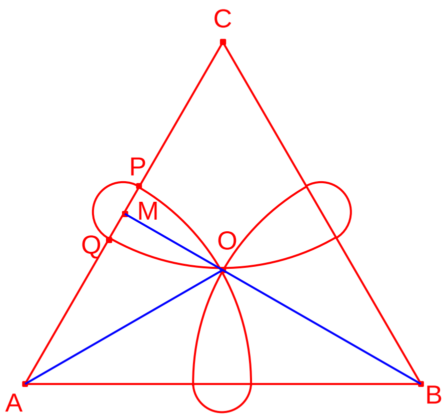
Calculeu l'àrea ombrejada.

Solució:

Siga $\overline{PQ}$ el diàmetre de la semicircumferència sobre el costat $\overline{AC}$.

$\overline{AP} = \overline{CQ} = \overline{OA}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$, centre de la semicircumferència.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Aplicant la propietat del baricentre O del triangle:

$\overline{OA} = \overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$, $\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}c$.

$\overline{AP} + \overline{CQ} = \overline{AC} + \overline{PQ}$.

$2\frac{\sqrt{3}}{3}c = c + \overline{PQ}$.

Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}c$.

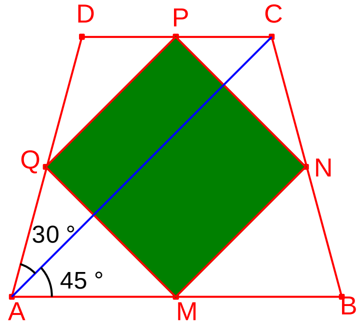
$\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}c$.

L'àrea ombrejada és igual a sis vegades l'àrea d'un sector circular de 30º i radi $\overline{AO}$ menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$ més àrea d'un quadrat de radi $\overline{MP}$:

$$S_{ombrejada} = 6\left(\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2\frac{30º}{360º} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}c\frac{\sqrt{3}}{6}c + \frac{1}{4}\pi\left(\frac{2\sqrt{3}-3}{6}c\right)^2\right).$$

$$S_{ombrejada} = 6\left(\frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{7-4\sqrt{3}}{48}\pi\right)c^2 \approx 0.1188c^2.$$

1483.- En la figura, ABCD és un trapezi isòsceles.



$\angle DAC = 30^o$, $\angle CAB = 45^o$.
M, N, P, Q són els punts migs dels costats del trapezi.
Proveu que MNPQ és un quadrat.

Solució:

$\overline{MN}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{MN}$ i $\overline{AC}$ són paral·lels i $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

$\overline{PQ}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.

$\overline{PQ}$ i $\overline{AC}$ són paral·lels i $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

$\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$ són paral·lels i $\overline{MN} = \overline{PQ} = \overline{AC} = \overline{BD}$.

Anàlogament, $\overline{MQ} = \overline{PN} = \overline{AC} = \overline{BD}$

Aleshores, MNPQ és un rombe.

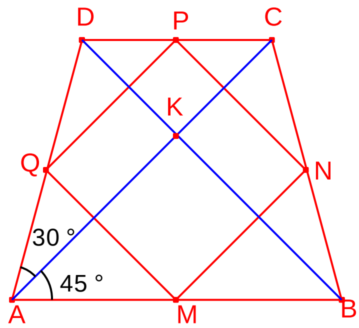
Siga K la intersecció de les diagonals del trapezi.

$\angle AKB = 180^o – 2\angle BAC = 90^o$.

Aleshores, les diagonals són perpendiculars.

Per tant, els costats $\overline{MN}$, $\overline{MQ}$ són perpendiculars.

Aleshores, MNPQ és un quadrat.



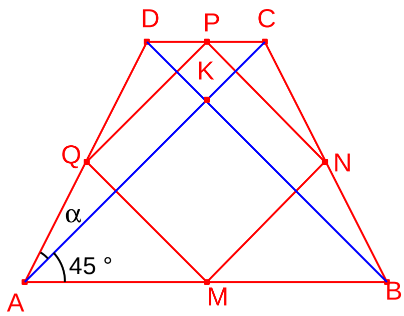
Generalització:

En la figura, ABCD és un trapezi isòsceles.

$\angle DAC = \alpha$, $\angle CAB = 45^o$.

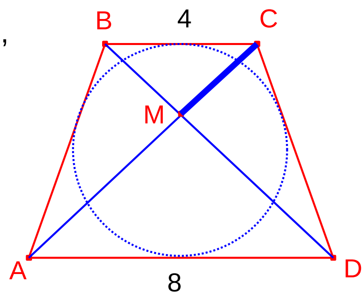
M, N, P, Q són els punts migs dels costats del trapezi.

Proveu que MNPQ és un quadrat.



1484.- Un trapezi isòsceles ABCD de bases paral·leles $\overline{AD}=8$, $\overline{BC}=4$ està circumscrit a una circumferència.

Siga M la intersecció de les diagonals.
Calculeu la mesura del segment $\overline{MC}$.



Solució:
$\overline{AB}=\overline{CD}$

Siga H la projecció de B sobre la base $\overline{AD}$.

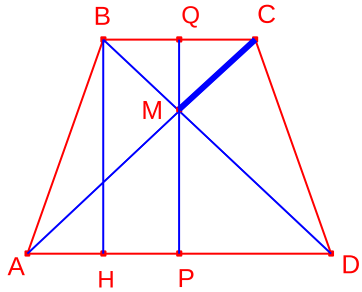
$\overline{AH}=\dfrac{\overline{AD}-\overline{BC}}{2}=\dfrac{8-4}{2}=2$.

Per estar el trapezi circumscrit a la circumferència:

$\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{AD}+\overline{BC}$.

$\overline{AB}+\overline{CD}=12$.

$\overline{AB}=\overline{CD}=6$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABH}$:

$\overline{BH}=4\sqrt{2}$.

Siguen P, Q els punts migs de les bases $\overline{AD}$, $\overline{BC}$.

$\overline{PQ}=\overline{BH}=4\sqrt{2}$.

Siga $x=\overline{QM}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADM}$, $\overset{\Delta}{CBM}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{x}{4}=\dfrac{4\sqrt{2}-x}{8}$. Resolent l'equació:

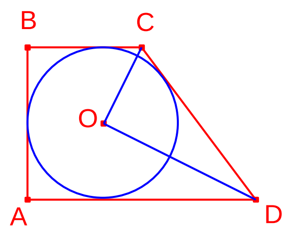
$x=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQM}$:

$$\overline{MC}=\sqrt{2^2+\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{68}}{3}\approx 2.7487\,.$$

1485.- En la figura, ABCD és un trapezi rectangle circumscrit a una circumferència de centre O.

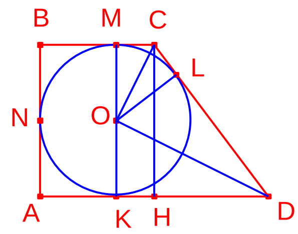
Si $\overline{OC}=2$ i $\overline{OB}=4$, determineu l'àrea del trapezi.



Solució:

Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència i el trapezi.

Siga $\overline{OK}=r$ radi de la circumferència.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLC}$:

$\overline{CL}=\overline{MC}=\sqrt{4-r^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLD}$:

$\overline{DL}=\overline{KD}=\sqrt{16-r^2}$.

Siga H la projecció de C sobre la base $\overline{AD}$.

$\overline{CH}=2r$.

$\overline{HD}=\sqrt{16-r^2}-\sqrt{4-r^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CHD}$:

$\left(\sqrt{16-r^2}+\sqrt{4-r^2}\right)^2=(2r)^2+\left(\sqrt{16-r^2}-\sqrt{4-r^2}\right)^2$. Simplificant:

$-20r^2+64=0$. Resolent l'equació:

$r=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\overline{AD}=r+\overline{KD}=\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$.

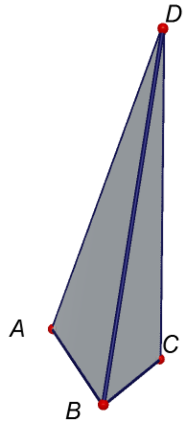
$\overline{BC}=r+\overline{MC}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

$\overline{AB}=2r=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD}=\frac{\frac{12\sqrt{5}}{5}+\frac{6\sqrt{5}}{5}}{2}\,\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{72}{5}=14.4.$$

1486.- En la figura, $\overline{CD}$ és perpendicular al plànol ABC.



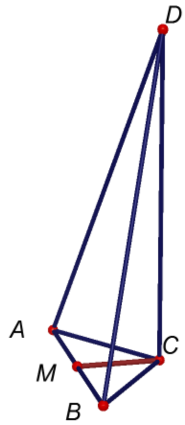
$\overline{AB} = 8$, $\overline{DA} = \overline{DB} = 13$ i $\overline{DC} = 12$.

Calculeu la distància del vèrtex C a l'aresta $\overline{AB}$.

Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{AC} = \overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$\overline{AC} = \overline{BC} = 5$.

.

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.

Siga M el punt mig de l'aresta

$\overline{CM}$ és perpendicular a l'aresta $\overline{AB}$.

La distància del vèrtex C a l'aresta $\overline{AB}$ és igual a $\overline{CM}$.

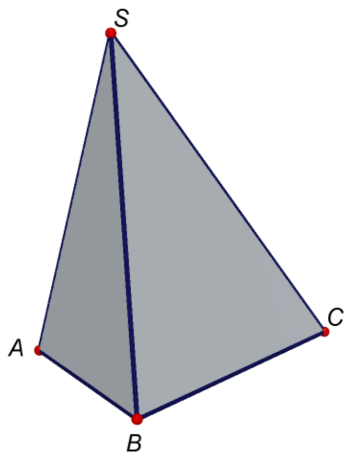
$\overline{AM} = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{CM} = 3$.

1487.- Siga el tetraedre ABCS tal que $\overline{AS} = 120$, $\angle ASB = \angle ASC = 45^o$ i $\angle BSC = 60^o$.

Calculeu la mesura de l'angle diedre que forma l'aresta $\overline{AS}$.

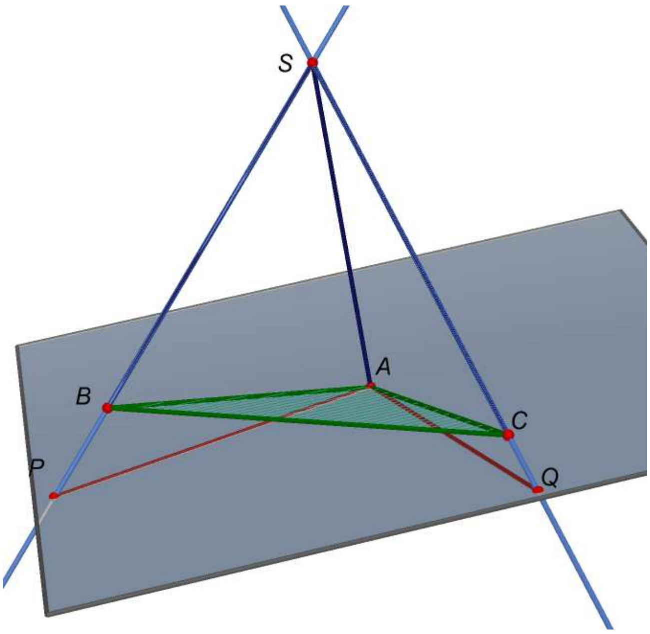


Solució:

Considerem el plànol que passa pel punt A i és perpendicular a l'aresta $\overline{AS}$.

Aquest plànol talla les rectes SB, SC que formen les arestes en els punts P i Q, respectivament.

L'angle diedre que forma l'aresta $\overline{AS}$ és igual a l'angle $\angle PAQ$.



Els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{PAS}$, $\overset{\Delta}{QAS}$ són iguals.

$\overline{PA} = \overline{QA} = \overline{AS} = 120^o$.

$\overline{SP} = \overline{SQ} = 120\sqrt{2}$.

Els triangle $\overset{\Delta}{PSQ}$ és isòsceles i a més a més, $\angle PSQ = 60^o$, aleshores és equilàter, per tant,

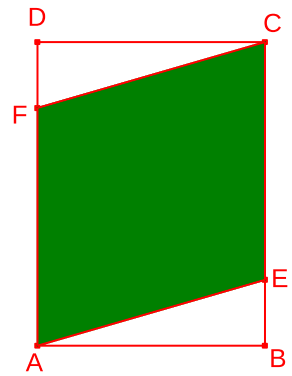
$\overline{PQ} = \overline{SP} = \overline{SQ} = 120\sqrt{2}$.

$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$.

Aplicant el teorema invers de Pitàgores,

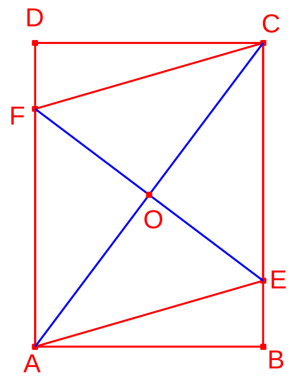
$\angle PAQ = 90^o$.

1488.- Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=12$, $\overline{AD}=16$.



Siguen E i F dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ tal que AECF és un rombe.
Calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=\sqrt{12^2+16^2}=20$.

Siga $c=\overline{AF}=\overline{CF}=\overline{AE}=\overline{CE}$, costats del rombe.

$\overline{EF}=16-c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDF}$:

$c^2=12^2+(16-c)^2$. Resolent l'equació:

$c=\frac{25}{2}$.

Siga O la intersecció de les diagonals del rombe.
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars i divideixen el rombe en quatre triangles rectangles iguals.

Siga $x=\overline{EF}$.

$\overline{OE}=\frac{x}{2}$, $\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=10$.

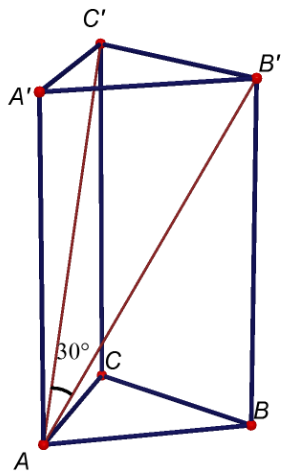
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COE}$:

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+10^2.$$

Resolent l'equació:

$x=\overline{EF}=15$.

1489.- Siga ABCA'B'C' un prisma triangular regular de volum 300.



Siga $\angle B'AC' = 30^{o}$.
Calculeu l'aresta de la base i l'altura del prisma.

Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base.
Siga $\overline{AA'} = h$ altura.
El volum del prisma regular és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = 300.$$

$$a^2 = 400\sqrt{3}\frac{1}{h}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABB'}$:

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AC'}^2 = a^2 + h^2.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$:

$$a^2 = 2(a^2 + h^2) - 2(a^2 + h^2)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$400\sqrt{3}\frac{1}{h} = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(400\sqrt{3}\frac{1}{h} + h^2\right).$$ Simplificant:

$$h^3 = 400\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

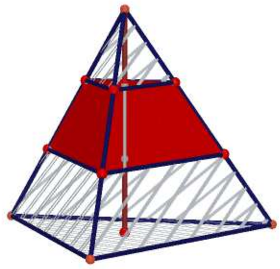
$$h = \sqrt[3]{400\left(3 + \sqrt{3}\right)} \approx 12.37.$$

$$a^2 = 400\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt[3]{400\left(3 + \sqrt{3}\right)}}.$$

$$a = \sqrt{\frac{400\sqrt{3}}{\sqrt[3]{400\left(3 + \sqrt{3}\right)}}} \approx 7.48.$$

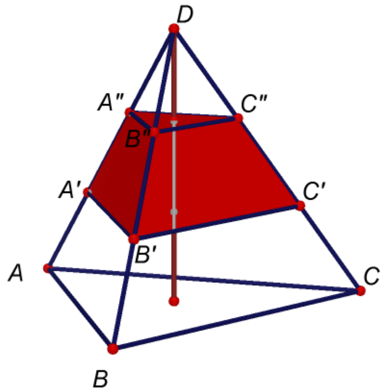
1490.- L'altura d'un tetraedre regular es divideix en tres parts iguals. Per aquests punts de divisió es dibuixen plànols paral·lels a la base.

Determineu la proporció entre els volums del sòlid intermig i el tetraedre inicial.



Solució:
Dos cossos que són semblants els volums són proporcionals al cub de la raó de semblança.

Siga ABCD el tetraedre regular.
Siga A'B'C'A"B"C" el tronc de con determinat pels plànols paral·lels a la base que passen pels punts en què l'altura es divideix en tres parts iguals.



Els tetraedres regulars ABCD, A'B'C'D són semblants i la raó de semblança és 3:1

Aleshores: $V_{A'B'C'D} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_{ABCD}$.

Els tetraedres regulars ABCD, A"B"C"D són semblants i la raó de semblança és 3:2

Aleshores: $V_{A''B''C''D} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_{ABCD}$.

El volum del tronc de con A'B'C'A"B"C" és:

$$V_{A'B'C'A''B''C''} = V_{A''B''C''D} - V_{A'B'C'D} = \frac{7}{27} V_{ABCD} .$$

$$\frac{V_{A'B'C'A''B''C''}}{V_{ABCD}} = \frac{7}{27} .$$