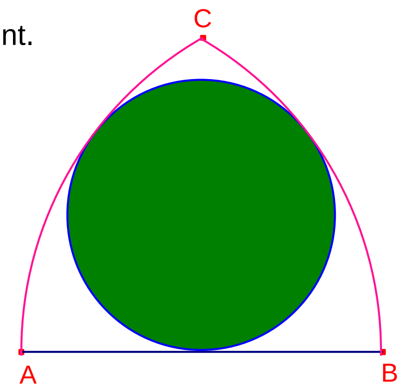
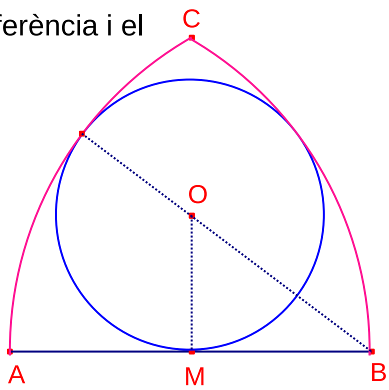
Problemes de Geometria per a l'ESO 15

141.- En la figura els arcs $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ tenen centre B, A, respectivament. Si $\overline{AB} = c$ calculeu el radi de la circumferència tangent als arcs i al segment $\overline{AB}$.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$, punt de tangència de la circumferència i el segment.
Siga $r = \overline{OM}$ radi de la circumferència.



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$\overline{OB} = c - r$, $\overline{BM} = \frac{c}{2}$.

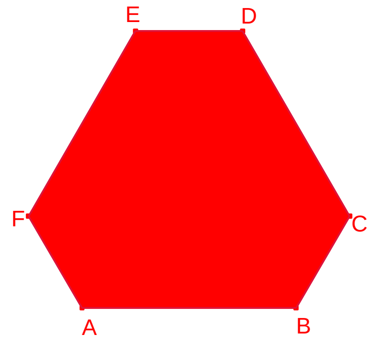
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

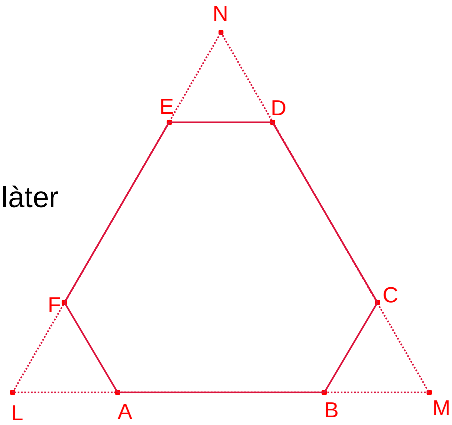
$$(c-r)^2 = r^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

$$2rc = \frac{3}{4}c^2.$$

Aleshores, $r = \frac{3}{8}c$.

142.- L'hexàgon ABCDEF té tots el angles iguals, $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FA}$, $\overline{AB} = 2 \cdot BC$.
Si $\overline{AB} = c$, calculeu l'àrea de l'hexàgon ABCDEF.





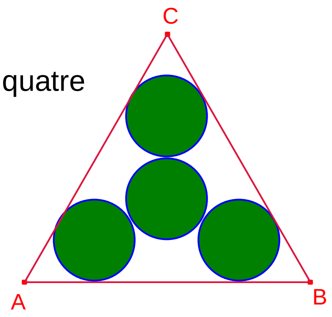
Solució:
Si prolonguem els costat AB, CD, EF, es forma el triangle equilàter $\overset{\Delta}{LMN}$ de costat $\overline{LM} = 2c$.

L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{LMN}$ menys l'àrea dels tres triangles equilàters $\overset{\Delta}{AFL}$, $\overset{\Delta}{BCM}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ de costats iguals a $\frac{c}{2}$.

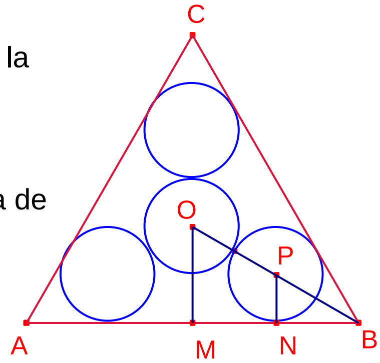
Aleshores:

$$S_{ABCDEF} = S_{LMN} - 3 \cdot S_{AFL} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2c)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{13\sqrt{3}}{16}c^2.$$

143.- En la figura el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter de costat c i les quatre circumferències tenen el mateix radi. Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga O el centre de la circumferència central i P el centre de la circumferència més propera al vèrtex B.
Siga $r=\overline{PN}$ radi de les circumferències.



La recta BP és bisectriu de l'angle B ja que la circumferència de centre P és tangent als costats.

$\angle MBP = 30^o$
Aleshores, $\overline{BP}=2r$

$\angle MBO = 30^o$, $\overline{BO}=\overline{OP}+\overline{BP}=4r$.
Aleshores, $\overline{OM}=2r$.
$\overline{BM}=\frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$$(4r)^2=(2r)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

$12r^2=\frac{1}{4}c^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r=\frac{\sqrt{3}}{12}c.$$

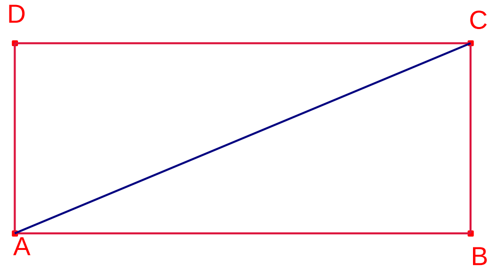
144.- Determineu un rectangle coneguts el costat $a = 6$ i la diferència $d - b = 4$ entre la diagonal i l'altre costat.

Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $a = \overline{AB} = 6$, $b = \overline{BC}$ i diagonal $d = \overline{AC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$d^2 = 36 + b^2$.



$(d - b)^2 = 4^2$.

$d^2 + b^2 - 2bd = 16$.

$36 + 2b^2 - 2b\sqrt{36 + b^2} = 16$.

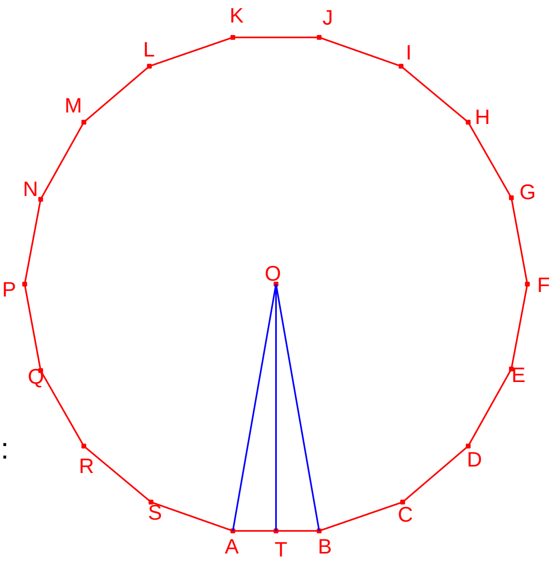
$b\sqrt{36 + b^2} = b^2 + 10$. Elevant al quadrat i simplificant:

$16b^2 = 100$. Resolent l'equació:

$b = \frac{5}{2}$. $d = \frac{13}{2}$.

145.- Siga a el costat d'un poligon regular de 18 costats i R el radi de la circumferència circumscrita al polígon. Proveu que $a^3 + R^3 = 3aR^2$.

Solució:
Siga el polígon regular ABCDEFGHIJKLMNPQRS de costat $a = \overline{AB}$. Siga O el centre de la circumferència circumscrita al dodecàgon regular.



$\angle AOB = \dfrac{360^o}{18} = 20^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$$\frac{a}{\sin 20^o} = \frac{R}{\sin 80^o}.$$

$$\frac{a}{\sin 20^o} = \frac{R}{2\sin 40^o \cdot \cos 40^o}.$$

$$\frac{a}{\sin 20^o} = \frac{R}{4\sin 20^o \cdot \cos 20^o \cdot \cos 40^o}.$$

$a = \dfrac{R}{4\cos 20^o \cdot \cos 40^o}$. Transformant productes en sumes:

$$a = \frac{R}{2(\cos 60^o + \cos 20^o)}.$$

$a = \dfrac{R}{1 + 2\cdot\cos 20^o}$. Aplicant raons trigonomètriques de l'angle doble:

$$a = \frac{R}{1 + 2(1 - 2\cdot\sin^2 10^o)}.$$

$$a = \frac{R}{3 - 4\cdot\sin^2 10^o}.$$

Siga T el punt mig del costat $\overline{AB}$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$$\sin 10^o = \frac{a}{2R}.$$

Aleshores:

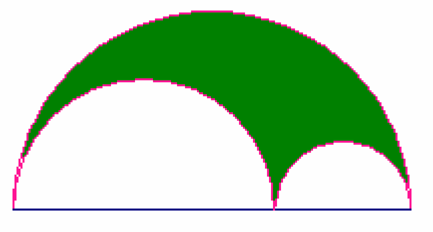
$$a = \frac{R}{3 - 4\cdot\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2}.$$

$$a = \frac{R}{3 - \dfrac{a^2}{R^2}}.$$

$$a = \frac{R^3}{3R^2 - a^2}.$$

$a^3 + R^3 = 3aR^2$.

146.- El radi de la semicircumferència gran és R calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga r el radi de la circumferència mitjana, aleshores el radi de la circumferència menuda és:

$$s = \frac{2R - 2r}{2} = R - r \ .$$

El perímetre de la regió és la suma de les longituds de les tres semicircumferències:
$P = \pi R + \pi r + \pi(R - r) = 2\pi R$.
És a dir, el perímetre és igual a la longitud de la circumferència gran.

147.- Un cub d'aresta a, un tetraedre regular d'aresta b i un octaedre regular d'aresta c tenen la mateixa superfície. Calculeu el valor de $\frac{\sqrt{bc}}{a}$.

Crux Mathematicorum M410.

Solució:

Les superfícies dels tres cossos són:

$S_{cub} = 6a^2$, $S_{tetraedre} = b^2\sqrt{3}$, $S_{octaedre} = 2c^2\sqrt{3}$.

Com les tres superfícies són iguals:

$6a^2 = b^2\sqrt{3} = 2c^2\sqrt{3}$.

$b^2\sqrt{3} \cdot 2c^2\sqrt{3} = \left(6a^2\right)^2$.

$(bc)^2 = 6a^4$.

$\left(\frac{bc}{a^2}\right)^2 = 6$

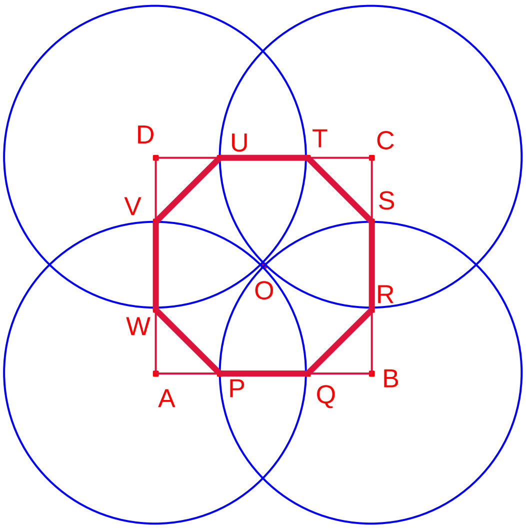
$\frac{bc}{a^2} = \sqrt{6}$.

Aleshores:

$\frac{\sqrt{bc}}{a} = \sqrt{\frac{bc}{a^2}} = \sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6}$.

148.- Donat un quadrat es dibuixen les 4 circumferències de centre els vèrtexs i que passen pel centre del quadrat. Les 4 circumferències tallen en 8 punts els costats del quadrat.
Demostreu que els punts formen un octògon regular.
Kömal C1012, desembre 2009.

Solució:
Siga el quadrat ABCD de centre O.
Sense perdre generalitat podem suposar que els costat del quadrat és $\overline{AB} = 1$.
Siga PQRSTUVW l'octògon que determinen les interseccions de les 4 circumferències i els costats del quadrat ABC.



Notem que $\overline{PQ} = \overline{RS} = \overline{TU} = \overline{VW}$,
$\overline{QR} = \overline{ST} = \overline{UV} = \overline{WP}$.

$\overline{AC} = \sqrt{2}$, $\overline{AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{AQ} = \overline{BP} = \overline{AO} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{PQ} = \overline{AQ} + \overline{BP} - \overline{AB} = \sqrt{2} - 1$.

$\overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{AQ} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QBR}$:

$\overline{QR} = \overline{QB} \cdot \sqrt{2} = \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.

Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{QR}$. Aleshores els costats de l'octògon són iguals.
$\angle BQR = 45^{o}$.
$\angle PQR = 180^{o} - 45^{o} = 135^{o}$. Aleshores els angles de l'octògon són iguals.
Per tant, l'octògon PQRSTUVW són iguals.

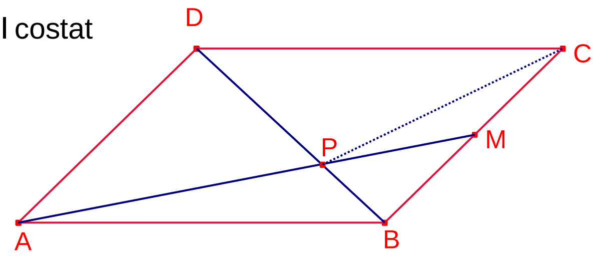
149.- La recta que va des d'un vèrtex d'un paral·lelogram al punt mig d'un dels costats oposats, divideix la diagonal en relació $\frac{1}{3}$.

Bruño, problema 125. Pàgina 175.

Solució:

Siga ABCD un paral·lelogram. Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

La recta AM talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt P.



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BMP}$.

Siga T l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BMP}$, $\overset{\Delta}{MCP}$ tenen la mateixa altura i les bases mesuren igual.

Aleshores, $S_{BMP} = S_{MCP} = S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BMP}$ i $\overset{\Delta}{DAP}$ són semblants i la raó és 1:2.

Aleshores, $S_{DAP} = 2^2 S_{BMP} = 4S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{CDB}$ són iguals.

Aleshores, $S_{ABD} = S_{CDB}$.

$$S_{DCP} = S_{ABD} - (S_{BMP} + S_{MCP}) = T + 4S - (2S) = T + 2S$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABD}} = \frac{T}{4S+T}.$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{S_{PBC}}{S_{BCD}} = \frac{2S}{4S+T}.$$

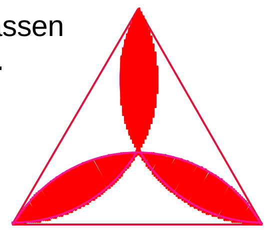
Igualant les expressions anteriors:

$$\frac{T}{4S+T} = \frac{2S}{4S+T}.$$

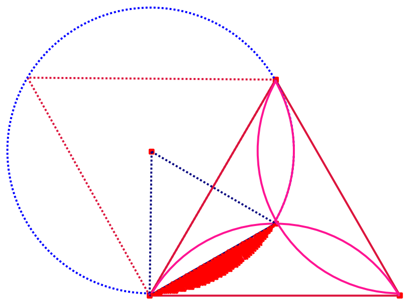
Aleshores: $T = 2S$.

Per tant, $\frac{\overline{BP}}{\overline{BD}} = \frac{T}{4S+T} = \frac{2S}{6S} = \frac{1}{3}$.

150.- Donat el triangle equilàter de costat 2a es dibuixen 3 arcs que passen pels vèrtexs i pel centre del triangle. Calculeu l'àrea de trèvol ombrejat. Bruño 586.



Solució:
Siga r el radi dels arcs.
Notem que el radi dels arcs és igual a la distància del vèrtex del triangle al centre del triangle.



Aleshores, $r=\frac{2}{3}a\sqrt{3}$.
El segment circular ombrejat ocupa un arc de 60º de circumferència.
La seua àrea és igual a la sisena part de l'àrea del cercle de radi r menys l'àrea del triangle equilàter de costat r.

$$S_{segment}=\frac{1}{6}\left(\pi\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$

L'àrea del trèvol és igual a sis vegades l'àrea del segment circular anterior:

$$S_{trèvol}=6\left(\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2\right)=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2.$$