Problemes de Geometria per a l'ESO 150

1491.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'àrea 32 s'han dividit cadascun dels costats en 4 parts iguals.

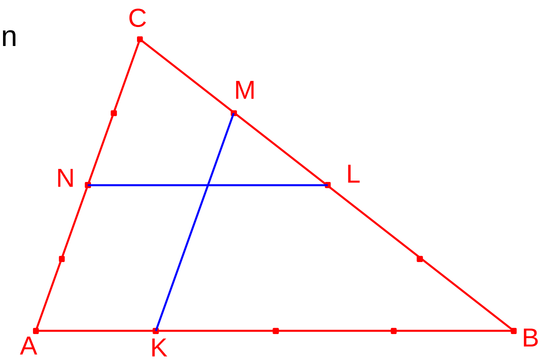
Siga K un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AK}:\overline{AB}=1:4$.

Siga L el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga M un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CM}:\overline{CB}=1:4$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AC}$.

Calculeu les àrees de les regions en què els segments $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$ divideixen el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució 1:

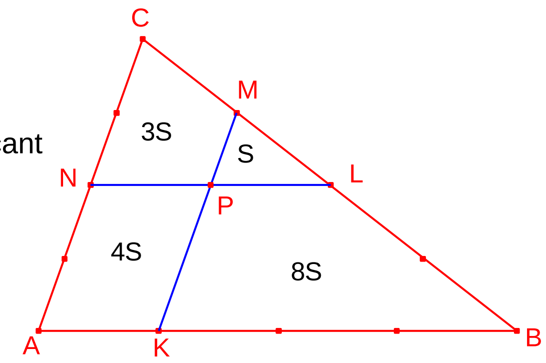
Siga P la intersecció dels segments $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PLM}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PLM}$, $\overset{\Delta}{NLC}$ són semblants i de raó 1:2. Aplicant el teorema de Tales:

$S_{NLC}=2^2S=4S$.

$S_{NPMC}=S_{NLC}-S_{PLM}=3S$.



Els triangles $\overset{\Delta}{PLM}$, $\overset{\Delta}{KBM}$ són semblants i de raó 1:3.
Aplicant el teorema de Tales:

$S_{KBM}=3^2S=9S$.

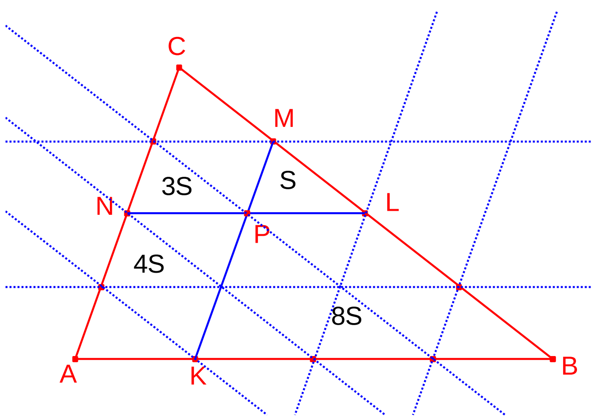
$S_{KBLP}=S_{KBM}-S_{PLM}=8S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{NLC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 1:3. Aplicant el teorema de Tales:

$S_{ABC}=2^2\cdot S_{NLC}=4\cdot 4S=16S$.

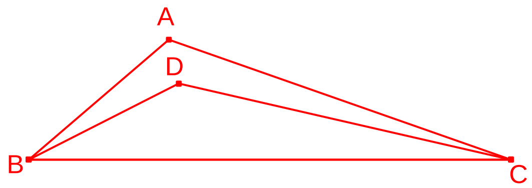
$S_{AKPN}=S_{ABC}-\left(S_{NLC}+S_{KBLP}\right)=16S-\left(4S+8S\right)=4S$.

Solució 2:



1492.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 120º$.

Siga D un punt en l'interior del triangle tal que $\angle DBC = 2\angle ABD$, $\angle DCB = 2\angle ACD$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle BDC$.



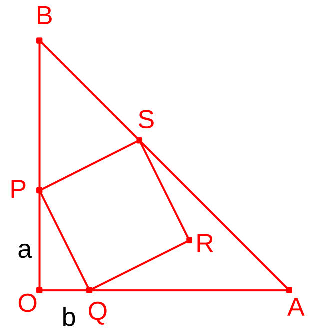
Solució:
Siga $\alpha = \angle ABD$, $\beta = \angle ACD$.

$\angle ABC = 3\alpha$,. $\angle ACB = 3\beta$.

$120º+3\alpha + 3\beta = 180º$.

$\alpha + \beta = 20º$.

$\angle BDC = 180º - (\angle DBC + \angle DCB) = 180º - 2(\alpha + \beta) = 140º$.



1493.- En un triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$ $O = 90^{o}$ siguen P, Q, S sobre el costats $\overline{AB}$, $\overline{OA}$ i $\overline{AB}$, respectivament tal que PQRS formen un quadrat.

Siga $\overline{OP} = a$, $\overline{OQ} = b$ i l'àrea del quadrat PQRS és igual a $\frac{2}{5}$ de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOB}$.

Determineu $\frac{a}{b}$.

Solució:

Suposem que $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és: $S_{AOB} = \frac{1}{2}$

Siga $\alpha = \angle OQP$.

Aleshores, $\angle BPS = \alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$\overline{PQ} = a^2 + b^2$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

L'àrea del quadrat PQRS és:

$$S_{PQRS} = \overline{PQ} = a^2 + b^2 = \frac{2}{5} S_{AOB}.$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{5} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BPS}$:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin 45^{o}} = \frac{1-a}{\sin(135^{o}-\alpha)}.$$

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1-a}{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Simplificant:

$$2a + b = 1 \qquad (2)$$

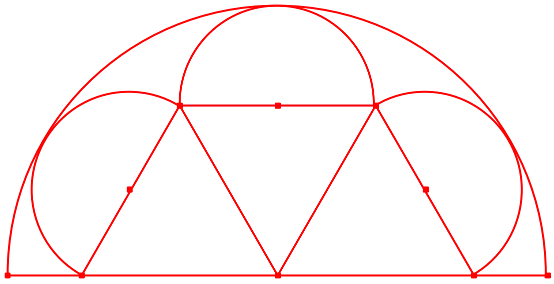
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{5} \\ 2a + b = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases}$.

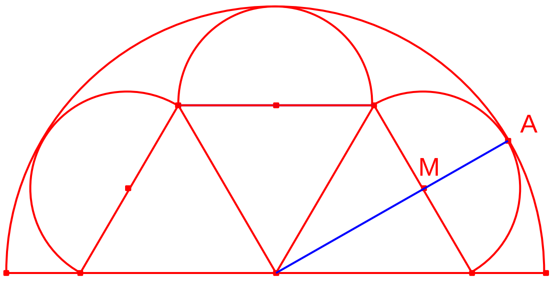
$$\frac{a}{b} = 2.$$

1494.- En la figura hi ha tres triangles equilàters, tres semicercles iguals, tangents a un semicercle exterior.

Si el radi del semicercle exterior és 6, calculeu el radi dels tres semicercles interiors.



Solució:



Siga $\overline{MA} = \overline{MB} = r$ radi del semicercle interior.

$\overline{OB} = 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$\overline{OM} = r\sqrt{3}$.

$\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{MA} = 6$.

$r\sqrt{3} + r = 6$. Resolent l'equació:

$r = 3\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.20$.

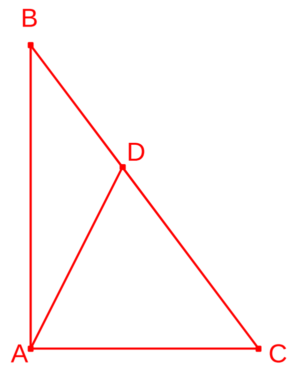
1495.- Les longituds dels costats del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$A = 90^{o}$ són $a = 100$, $b = 60$, $c = 80$.

Siga D un punt de la hipotenusa tal que $\overline{AD}$ divideix del triangle

$\overset{\Delta}{ABC}$ en dos triangles d'igual perímetre.

Calculeu la mesura del segment $\overline{AD}$.



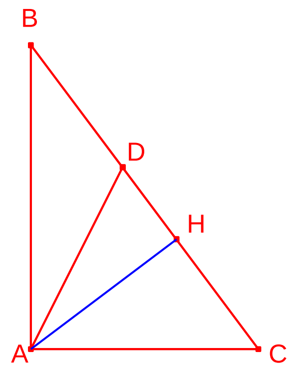
Solució:

Siguen $\overline{AD} = x$, $\overline{CD} = y$.

Els perímetres dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són iguals, aleshores:

$80 + x + 10 - y = x + y + 60$. Simplificant:

$y = 60$.



Siga $\overline{AH} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}100h = \frac{1}{2}60 \cdot 80$. Resolent l'equació:

$h = 48$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACH}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

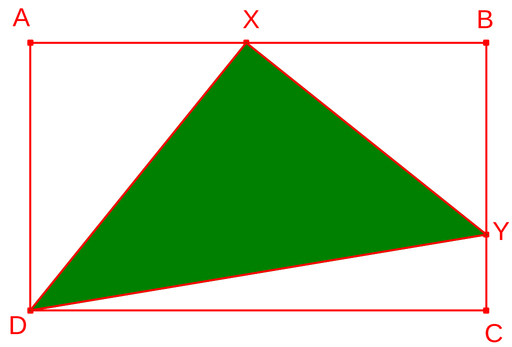
$\frac{\overline{CH}}{60} = \frac{60}{100}$. Resolent l'equació:

$\overline{CH} = 36$.

$\overline{DH} = \overline{CD} - \overline{CH} = 60 - 36 = 24$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$x = \overline{AD} = \sqrt{48^2 + 24^2} = 24\sqrt{5}$.



1496.- Siga ABCD un rectangle.

Siguen X, Y dos punts dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament, tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AXD}$ és 5, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BXY}$ és 4 i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CYD}$ és 3.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DXY}$.

Solució:

Siga $a=\overline{AB}$, $\overline{AD}=b$ costats del rectangle.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AXD}$ és 5, aleshores:

$$\overline{AX}=\frac{10}{b}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CYD}$ és 3, aleshores:

$$\overline{CY}=\frac{6}{a}.$$

$$\overline{BX}=a-\frac{10}{b},\ \overline{BY}=b-\frac{6}{a}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BXY}$ és 4, aleshores:

$$\left(a-\frac{10}{b}\right)\left(b-\frac{6}{a}\right)=8.$$

$$ab-6-10+\frac{60}{ab}=8.$$

$(ab)^2-24(ab)+60=0$. Resolent l'equació:

$ab=12+2\sqrt{21}$, l'altra solució és absurda.

$$S_{DXY}=S_{ABCD}-\left(S_{AXD}+S_{BXY}+S_{CYD}\right).$$

$$S_{DXY}=ab-(5+4+3).$$

$$S_{DXY}=12+2\sqrt{21}-(5+4+3)=2\sqrt{21}.$$

1497.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els costats estan sobre les següents rectes:

El costat $\overline{AB}$ sobre la recta d'equació $3x-2y+3=0$. El costat $\overline{BC}$ sobre la recta $x+y-14=0$. El costat $\overline{AC}$ sobre la recta $y=3$.

Siga P un punt tal que $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$.
Determineu l'equació de la recta que passa pels punts A, P.

Solució:
El punt P és el circumcentre del triangle (intersecció de les rectes mediatrius als costats).

Determinem les coordenades dels vèrtexs del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

El vèrtex A és la intersecció de les rectes $\begin{cases}3x-2y=3\\ y=3\end{cases}$. Les seues coordenades són: $A(1,3)$.

El vèrtex B és la intersecció de les rectes $\begin{cases}3x-2y=3\\ x+y=14\end{cases}$. Les seues coordenades són: $B(5,9)$.

El vèrtex C és la intersecció de les rectes $\begin{cases}x+y=14\\ y=3\end{cases}$. Les seues coordenades són: $C(11,3)$.

El punt mig M del costat $\overline{AC}$ té coordenades: $M(6,3)$.

La recta mediatriu al costat $\overline{AC}$ té equació: $m_{AC}\equiv x=6$.

El punt mig N del costat $\overline{BC}$ té coordenades: $N(8,6)$.

La recta mediatriu al costat $\overline{BC}$ té equació: $m_{BC}\equiv y=x-2$.

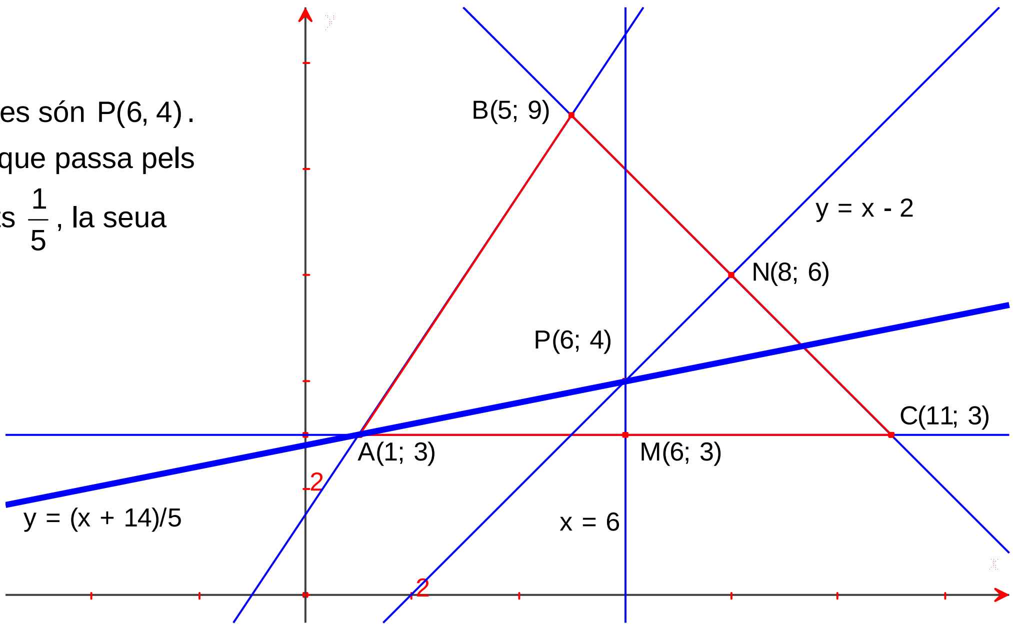
El punt P és la intersecció de les rectes mediatrius:

$$\begin{cases}y=x-2\\ x=6\end{cases}.$$

Les seues coordenades són $P(6,4)$.

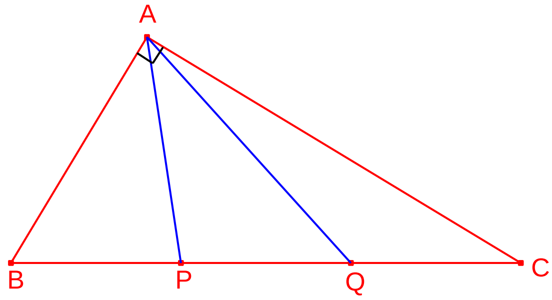
L'equació de la recta que passa pels punts A, P té pendents $\frac{1}{5}$, la seua equació és:

$$r_{AP}=y-3=\frac{1}{5}(x-1).$$



1498.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.

Siguen P i Q dos punts de la hipotenusa tal que
$\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$.
Si $\overline{AP} = 3$ i $\overline{AQ} = 4$, determineu els costats del triangle.



Solució:

Siga $x = \overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$.

Siga M el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{3}{2}x$.

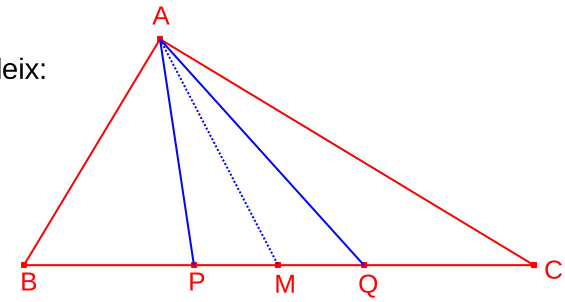
$\overline{AM}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$. La seua mesura compleix:

$\frac{3}{2}x = \frac{\sqrt{2\cdot 3^2 + 2\cdot 4^2 - x^2}}{2}$. Simplificant:

$x^2 = 5$.

La hipotenusa del triangle mesura:

$\overline{BC} = 3x = 3\sqrt{5}$.



$\overline{AP}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABQ}$. La seua mesura compleix:

$3 = \frac{\sqrt{2c^2 + 2\cdot 4^2 - 4x^2}}{2}$. Simplificant:

$c^2 = 12$.

El catet $\overline{AB} = \sqrt{12}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

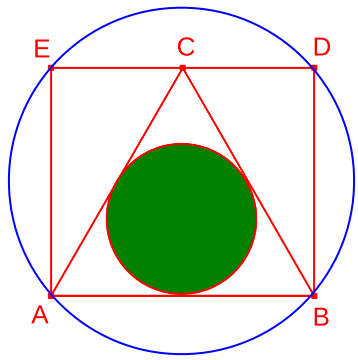
$(3x)^2 = c^2 + b^2$.

$b^2 = 33$.

El catet $\overline{AC} = \sqrt{33}$.

1499.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter circumscrit a una circumferència de radi 1.

Una circumferència està circumscrita al rectangle ABDE.
Determineu el diàmetre de la circumferència gran.

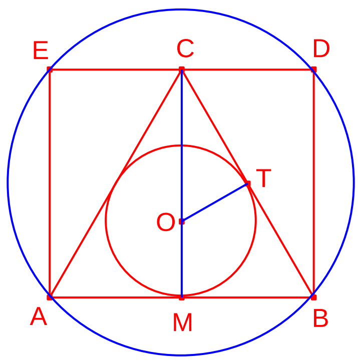


Solució:

Siga O el centre de la circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siguen M i T els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.

$\overline{OM} = \overline{OT} = 1$, $\angle OCT = 30^{o}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:

$\overline{OC} = 2$, $\overline{CT} = \sqrt{3}$.

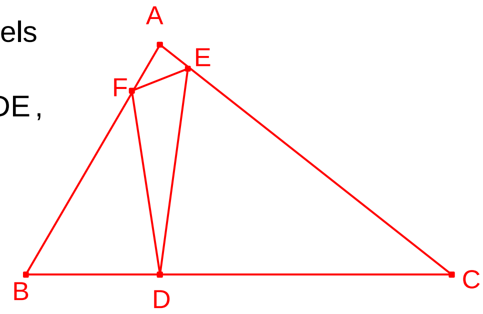
$\overline{BC} = \overline{CM} = \overline{OM} + \overline{OC} = 3$, $\overline{AB} = 2\overline{CT} = 2\sqrt{3}$.

El diàmetre de la circumferència circumscrita al rectangle ABDE és igual a la seua diagonal.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 = 21$.

$\overline{AD} = \sqrt{21}$.



1500.- Donat el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, considerem els punts D, E, F dels costats $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$, respectivament, tals que $\angle BDF = \angle CDE$, $\angle CED = \angle AEF$, i $\angle AFE = \angle BFD$.

a) Proveu que $\angle BDF = \angle BAC$.

b) Si $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 8$, i $\overline{CA} = 7$, determineu la longitud del segment $\overline{BD}$.

Solució:

a)

Siga $\alpha = \angle BDF = \angle CDE$, $\beta = \angle CED = \angle AEF$, i $\gamma = \angle AFE = \angle BFD$.

$\angle FDE = 180º - 2\alpha$, $\angle DEF = 180º - 2\beta$, $\angle EFD = 180º - 2\gamma$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és 180º:

$180º - 2\alpha + 180º - 2\beta + 180º - 2\gamma = 180º$. Simplificant:

$\alpha + \beta + \gamma = 180º$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és 180º:

$A + \beta + \gamma = 180º$.

Aleshores, $\alpha = A$.

Anàlogament, $\beta = B$, $\gamma = C$.

b)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DBF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BD} = 5p$, $\overline{BF} = 8p$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DEC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{CD} = 7q$, $\overline{CE} = 8q$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AEF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AE} = 5r$, $\overline{AF} = 7r$.

$\begin{cases} \overline{BD} + \overline{CD} = 8 \\ \overline{CE} + \overline{AE} = 7 \\ \overline{AF} + \overline{BF} = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} 5p + 7q = 8 \\ 8q + 5r = 7 \\ 8p + 7r = 5 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} p = \dfrac{1}{2} \\ q = \dfrac{11}{14} \\ r = \dfrac{1}{7} \end{cases}$.

Aleshores, $\overline{BD} = 5p = \dfrac{5}{2}$.