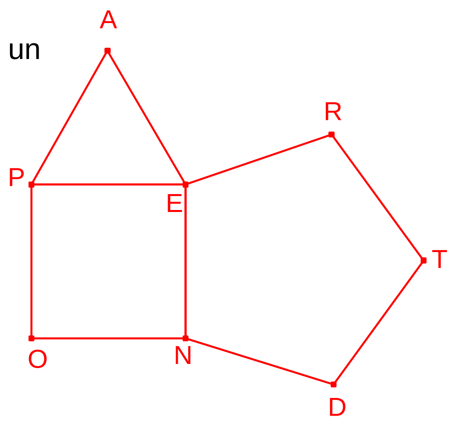
Problemes de Geometria per a l'ESO 151



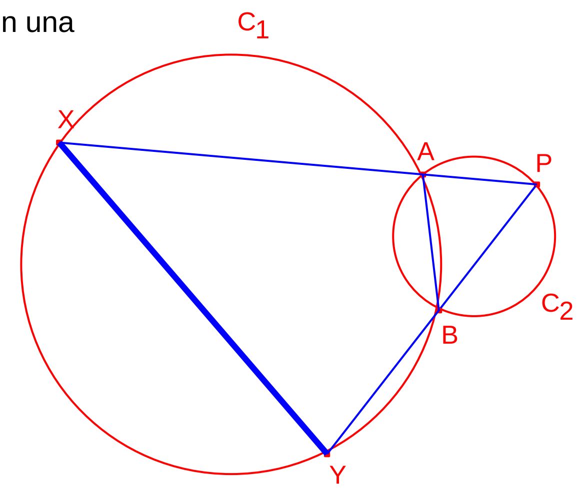
1501.- En la figura, TREND és un pentàgon regular, PEA és un triangle equilàter i OPEN és un quadrat.
Determineu la mesura de l'angle $\angle EAR$.

Solució:
Tots els tres polígons tenen els costats iguals.
L'angle interior d'un polígon regular de n costats mesura
$\alpha = \dfrac{180(n-2)}{n}$.
L'angle interior del pentàgon regular mesura:
$\angle REN = 108^{\circ}$.

$\angle PEN = 90^{\circ}$.
$\angle PEA = 60^{\circ}$.

$\angle AER = 360^{\circ} - (\angle REN + \angle PEN + \angle PEA) = 102^{\circ}$.

El triangle $\overset{\Delta}{AER}$ és isòsceles, $\overline{AE} = \overline{RE}$, aleshores:
$\angle EAR = \angle ERA$, per tant:
$\angle EAR = \dfrac{180^{\circ} - \angle AER}{2} = 39^{\circ}$.



1502.- En la figura dues circumferències C_1, C_2 tenen una corda comuna $\overline{AB}$.

Les rectes PA, PB tallen la circumferència C_1 en els punts S i Y, respectivament.

Si $\overline{AB}=6$, $\overline{PA}=5$, $\overline{PB}=7$ i $\overline{AX}=16$, determineu la mesura del segment $\overline{XY}$.

Solució:

$\overline{PX}=\overline{PA}+\overline{AX}=21$.

Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència C_1:

$\overline{PA}\cdot\overline{PX}=\overline{PB}\cdot\overline{PY}$.

$5\cdot 21=7\cdot\overline{PY}$. Resolent l'equació:

$\overline{PY}=15$.

Siga $\alpha=\angle XPY$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$6^2=5^2+7^2-2\cdot 5\cdot 7\cos\alpha$.

Aleshores, $\cos\alpha=\dfrac{19}{35}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{XYP}$:

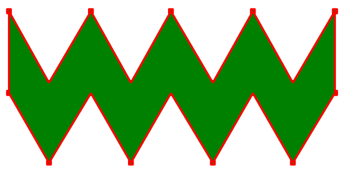
$\overline{XY}^2=21^2+15^2-2\cdot 21\cdot 15\cos\alpha$.

$\overline{XY}^2=21^2+15^2-2\cdot 21\cdot 15\dfrac{19}{35}$.

$\overline{XY}^2=324$.

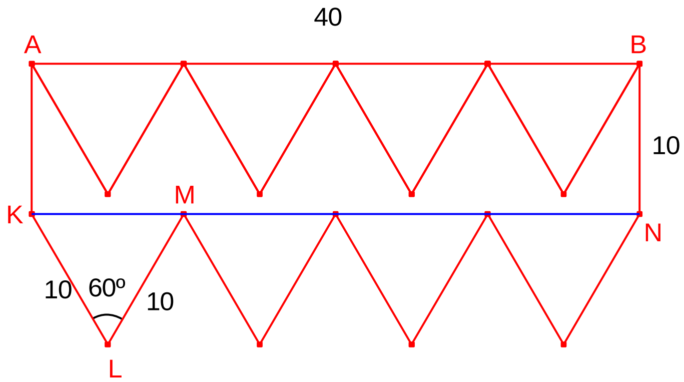
$\overline{XY}=18$.

1503.- Tots els costats de la figura mesuren 10 cm i els angles interiors són de 30º, 60º, 150º i 300º. Determineu l'àrea de la figura.



KöMaL, K439. Desembre 2014.

Solució:



$\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LM} = 10$.

$\angle KLM = 60º$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és equilàter.

$\angle KLM = 150º$,

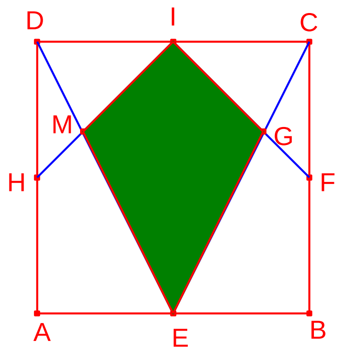
Aleshores, $\angle AKM = 90º$.

$\overline{AB} = 40$.

L'àrea de la figura és igual a l'àrea del rectangle ABNM.

$S = 10 \cdot 40 = 400 cm^2$.

1504.- Siga ABCD un quadrat de costat 1.



Siguen D, F, I H els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivament.

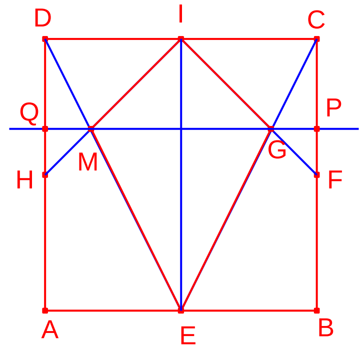
Siga G la intersecció dels segments $\overline{CD}$, $\overline{FI}$.

Siga M la intersecció dels segments $\overline{DE}$, $\overline{HI}$.

Determineu l'àrea del quadrilàter MEGI.

KöMaL, C1260. Desembre 2014.

Solució:



Sigq P la projecció de G sobre $\overline{BC}$.

Siga Q la projecció de M sobre $\overline{AD}$.

Siga $x = \overline{GP} = \overline{MQ}$.

$\overline{FP} = \overline{GP} = x$.

$\overline{CP} = \frac{1}{2} - x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EBC}$, $\overset{\Delta}{GPC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\frac{1}{2} - x} = \frac{1}{2}.$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1}{6}.$$

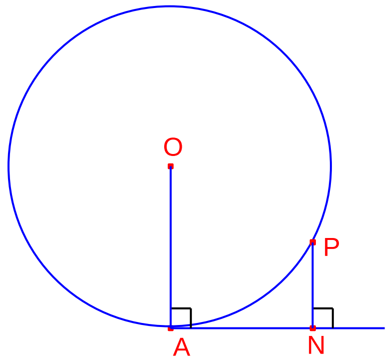
$\overline{EI} = 1$.

$$\overline{MG} = 1 - 2x = \frac{2}{3}.$$

L'àrea del cometa MEGI és:

$$S_{MEGI} = \frac{1}{2}\overline{MG} \cdot \overline{EI} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

1505.- En la figura, O és el centre de la circumferència.



La semirecta AN és tangent a la circumferència en el punt A.

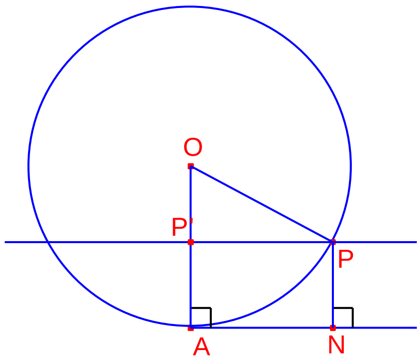
P és un punt de la circumferència tal que $\overline{PN}$ és perpendicular a AN.

Si $\overline{AN}=15$ i $\overline{PN}=9$ determineu el radi de la circumferència.

Solució:

Siga $r=\overline{OA}=\overline{OP}$ radi de la circumferència de centre O.

Siga P' la projecció de P sobre el segment $\overline{OA}$.



$\overline{P'A}=\overline{PN}=9$, $\overline{P'P}=\overline{AN}=15$.

$\overline{OP'}=r-9$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OP'P}$:

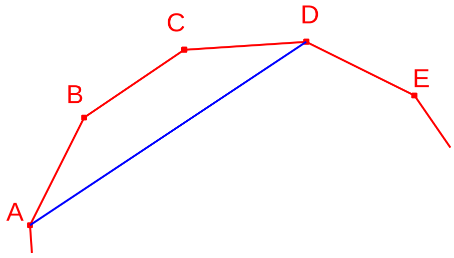
$r^2=(r-9)^2+15^2$.

Resolent l'equació:

$r=17$.

1506.- En un polígon regular ABCDEF..., $\angle ADE = 120^{o}$.

Determineu el nombre de costats del polígon.



Solució:
Siga n el nombre de costats del polígon regular.
Siga $\alpha = \angle ADC$.
Aquest angle és inscrit en la circumferència circumscrita al polígon regular i abraça 2 parts de circumferència de les n parts que abraça el polígon:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{360^{o}}{n}2\right) = \frac{360^{o}}{n}.$$

$\angle CDE$ és un angle interior del triangle:

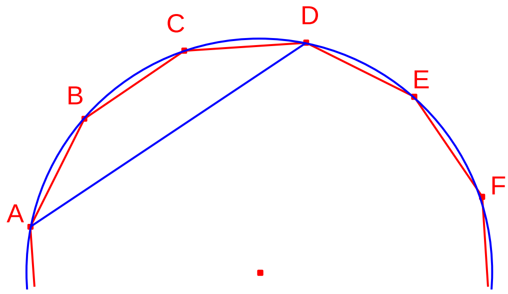
$$\angle CDE = 180^{o} - \frac{360^{o}}{n}.$$

$\angle CDE = \alpha + 120^{o}$.

Aleshores:

$$180^{o} - \frac{360^{o}}{n} = \frac{360^{o}}{n} + 120^{o}.$$

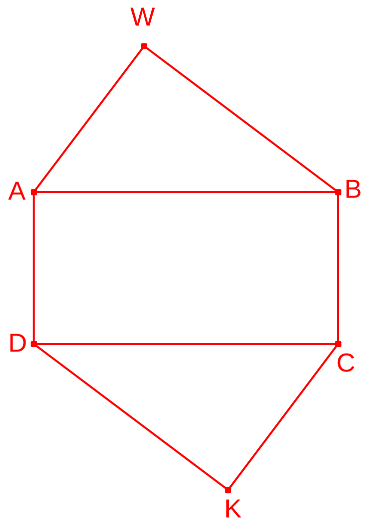
Resolent l'equació, $n = 12$.



1507.- En la figura, ABCD un rectangle tal que $\overline{AB}=20$, $\overline{BC}=10$.

W i K fora del triangle tal que $\overline{WA}=\overline{KC}=12$, $\overline{WB}=\overline{KD}=16$.

Determineu la longitud del segment $\overline{WK}$.



Solució:

Siga O el centre del quadrat.

El triangle $\overset{\Delta}{CKD}$ és simètric del triangle $\overset{\Delta}{AWB}$ respecte de O.

Siga H la projecció de W sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga P la projecció de O sobre la recta WH.

Siga Q la projecció de O sobre el costat $\overline{AD}$.

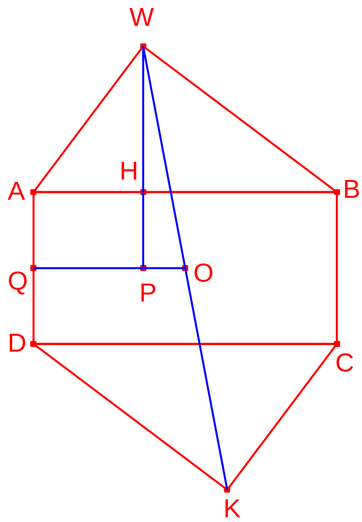
El triangle $\overset{\Delta}{AWB}$ és rectangle ja que $20^2=12^2+16^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AWB}$ és:

$$S_{AWB}=\frac{\overline{WA}\cdot\overline{WB}}{2}=\frac{12\cdot 16}{2}=96.$$

$$S_{AWB}=\frac{20\cdot\overline{WH}}{2}=96.$$

Aleshores, $\overline{WH}=\frac{48}{5}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AWB}$:

$$\overline{AH}=\sqrt{12^2-\left(\frac{48}{5}\right)^2}=\frac{36}{5}.$$

$$\overline{WP}=\overline{WH}+\frac{\overline{BC}}{2}=\frac{48}{5}+5=\frac{73}{5}.$$

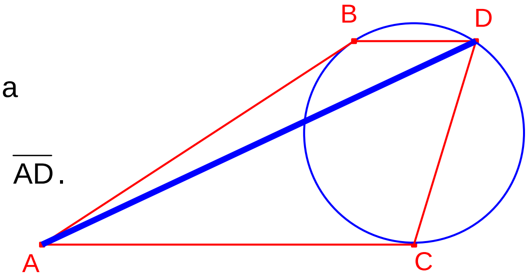
$$\overline{OP}=\frac{\overline{AB}}{2}-\overline{AH}=10-\frac{36}{5}=\frac{14}{5}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{WPO}$:

$$\overline{OW}=\sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2+\left(\frac{73}{5}\right)^2}=\sqrt{221}.$$

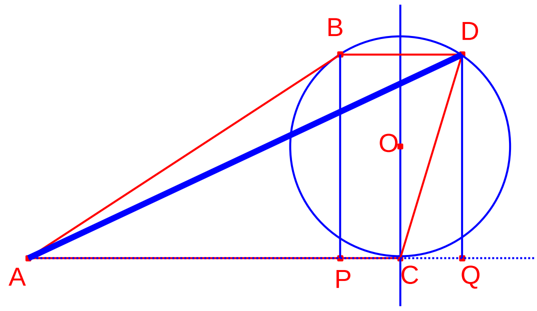
$$\overline{WK}=2\cdot\overline{OW}=2\sqrt{221}.$$

1508.- En la figura, els segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ són tangent a la circumferència (B i C pertanyen a la circumferència).



Pel punt B tracem una paral·lela al segment $\overline{AC}$ que talla la circumferència en el punt D.
Si $\overline{AB} = 49$ i $\overline{CD} = 28$, determineu la longitud del segment $\overline{AD}$.

Solució:
$\overline{AC} = \overline{AB} = 49$.
Siga O el centre de la circumferència
Siga P la projecció de B sobre $\overline{AC}$.
Siga Q la projecció de D sobre $\overline{AC}$.
La recta CO és mediatriu de la corda $\overline{BD}$.
Siga $x = \overline{PC} = \overline{CQ}$.
Siga $h = \overline{PB} = \overline{QD}$.
$\overline{AP} = 49 - x$, $\overline{AQ} = 49 + x$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$$h^2 + (49 - x)^2 = 49^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQD}$:

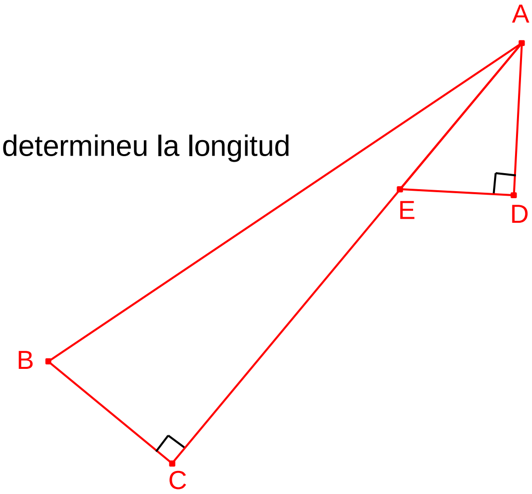
$$h^2 + x^2 = 28^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} h^2 + (49 - x)^2 = 49^2 \\ h^2 + x^2 = 28^2 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x = 8 \\ h = 12\sqrt{5} \end{cases}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQD}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{57^2 + \left(12\sqrt{5}\right)^2} = 63.$$



1509.- En la figura, $\angle ACB = \angle ADE = 90º$.

Si $\overline{AB} = 75$, $\overline{BC} = 21$, $\overline{AD} = 20$ i $\overline{CE} = 17$, determineu la longitud del segment $\overline{BD}$.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{75^2 - 21^2} = 72$.

$\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = 72 - 47 = 25$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{DE} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.

Siga $\alpha = \angle DAE$, $\beta = \angle BAC$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

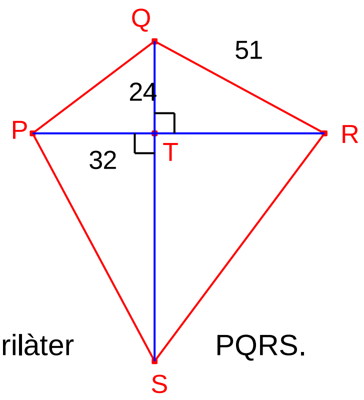
$\cos\beta = \frac{24}{25}$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD}^2 = 20^2 + 75^2 - 2 \cdot 20 \cdot 75\cos(\alpha + \beta)$

$\overline{BD}^2 = 20^2 + 75^2 - 2 \cdot 20 \cdot 75\left(\frac{4}{5}\frac{24}{25} - \frac{3}{5}\frac{7}{25}\right) = 4225$.

$\overline{BD} = 65$.



1510.- En el quadrilàter PQRS les diagonals que es tallen en el punt T són perpendiculars.

Si $\overline{QR}=51$, $\overline{PT}=32$ i $\overline{QT}=24$.

a) Calculeu la longitud del costat $\overline{PQ}$.

b) Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.

c) Si $\overline{QS}:\overline{PR}=12:11$ determineu el perímetre i l'àrea del quadrilàter PQRS.

Solució:

a)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQT}$:

$\overline{PQ}=\sqrt{32^2+24^2}=40$.

b)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QTR}$:

$\overline{PQ}=\sqrt{51^2-24^2}=45$.

$\overline{PR}=77$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\overline{PR}\cdot\overline{QT}=\frac{1}{2}77\cdot 24=924.$$

c)

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{PR}}=\frac{12}{11}.$$

Aleshores, $\overline{QS}=84$.

L'àrea del quadrilàter PQRS és:

$$S_{PQRS}=\frac{1}{2}\overline{PR}\cdot\overline{QS}=\frac{1}{2}77\cdot 84=3234.$$

$\overline{TS}=\overline{QS}-24=60$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTS}$:

$\overline{PS}=\sqrt{32^2+60^2}=68$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{STR}$:

$\overline{RS}=\sqrt{45^2+60^2}=75$.

El perímetre del quadrilàter PQRS és;

$P_{PQRS}=40+51+68+75=234$.