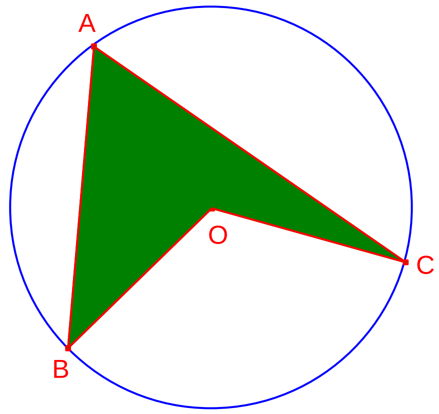
Problemes de Geometria per a l'ESO 152

1511.- En la figura, la circumferència de centre O té radi $\sqrt{7}$. A, B, C són punts de la circumferència tal que $\angle BOC = 120^{\circ}$ i $\overline{AC} = \overline{AB} + 1$.

a) Calculeu la longitud del segment $\overline{AB}$.

b) Calculeu l'àrea del quadrilàter ABOC.



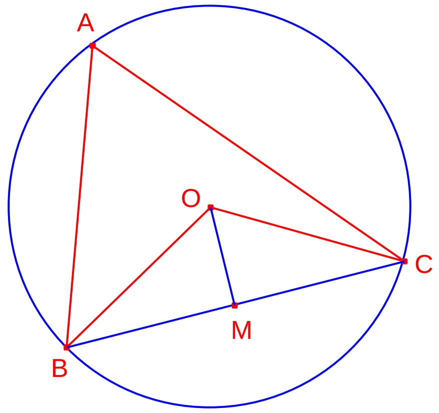
Solució:

Siga $x = \overline{AB}$.

$\angle BAC$ és un angle inscrit en la circumferència que abraça 120º.

$\angle BAC = \frac{120^{\circ}}{2} = 60^{\circ}$.

Siga M el punt mig de la corda $\overline{BC}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:

$\overline{BM} = \sqrt{7}\cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

$\overline{BC} = 2\overline{BM} = \sqrt{21}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\left(\sqrt{21}\right)^2 + x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1)\cos 60^{\circ}$.

$x^2 + x - 20 = 0$. Resolent l'equació:

$x = 4$.

$\overline{AB} = 4, \overline{AC} = 5$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} 4 \cdot 5 \cdot \sin 60^{\circ} = 5\sqrt{3}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és:

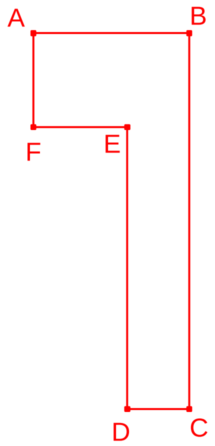
$S_{OBC} = \frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}\sin 120^{\circ} = \frac{7}{4}\sqrt{3}$.

L'àrea del quadrilàter ABOC és:

$S_{ABOC} = S_{ABC} - S_{OBC} = 5\sqrt{3} - \frac{7}{4}\sqrt{3} = \frac{13}{4}\sqrt{3}$.

1512.- En la figura, $\overline{AB} = 50$, $\overline{AC} = 130$.

Determineu el perímetre de la figura.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BC} = \sqrt{130^2 - 50^2} = 120$.

$\overline{AF} + \overline{ED} = \overline{BC}$.

$\overline{FE} + \overline{DE} = \overline{AB}$.

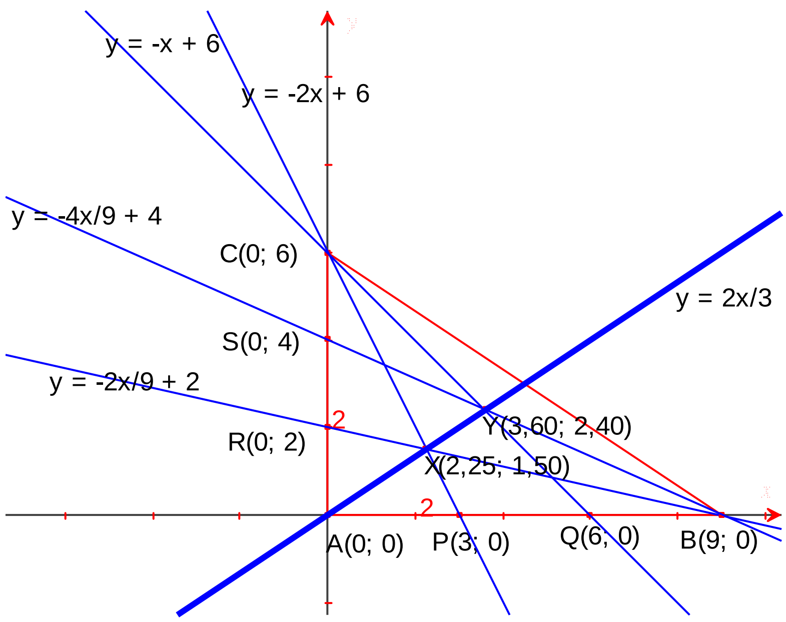
Aleshores el perímetre de la figura és:

$P_{ABCDEF} = 2\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = 2(50 + 120) = 340$.

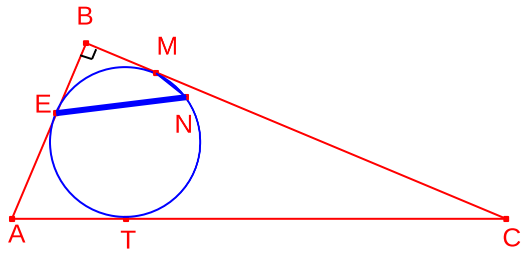
1513.- Siguen els punts $A(0,0)$, $B(9,0)$, $C(0,6)$.

Siguen els punts P i Q del segment $\overline{AB}$ tal que $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}$.
Siguen els punts R, S del segment $\overline{AC}$ tal que $\overline{AR}=\overline{RS}=\overline{SC}$.
Les rectes BR i CP es tallen en el punt X.
Les rectes BS i CQ es tallen en el punt Y.
Proveu que els punts A, X, Y estan alineats.

Solució:
Les coordenades dels punts P, Q són: $P(3,0)$, $Q(6,0)$.
Les coordenades dels punts R, S són: $R(0,2)$, $S(0,4)$.
L'equació de la recta que passa pels punts B, R és: $r_{BR}\equiv y=\frac{-2}{9}x+2$.
L'equació de la recta que passa pels punts C, P és: $r_{CP}\equiv y=-2x+6$..
La intersecció de les dues rectes és el punt X que té coordenades: $X\left(\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)$.
L'equació de la recta que passa pels punts B, S és: $r_{BS}\equiv y=\frac{-4}{9}x+4$.
L'equació de la recta que passa pels punts C, Q és: $r_{CQ}\equiv y=-x+6$..
La intersecció de les dues rectes és el punt Y que té coordenades: $Y\left(\frac{18}{5},\frac{12}{5}\right)$.
L'equació que passa pels punts X, Y és:
$r_{XY}\equiv y=\frac{2}{3}x$. L'ordenada a l'origen és 0.
El punt A pertany a la recta que passa pels punts X, Y, aleshores, els tres punts estan alineats.



1514.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B=90^{o}$, $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=13$.



Siguen E, T, M punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle (veure figura).
Siga N un punt de la circumferència inscrita tal que $\angle NMC=15^{o}$.

Determineu la longitud del segment $\overline{EN}$.

Solució:

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BC}=12$

$r=\overline{BE}=\overline{BM}=\dfrac{a+c-b}{2}$.

$r=\overline{BE}=\overline{BM}=\dfrac{12+5-13}{2}=2$.

$\angle BME=\angle BEM=45^{o}$.

$\angle EMNB=180^{o}-(15^{o}+45^{o})=120^{o}$.

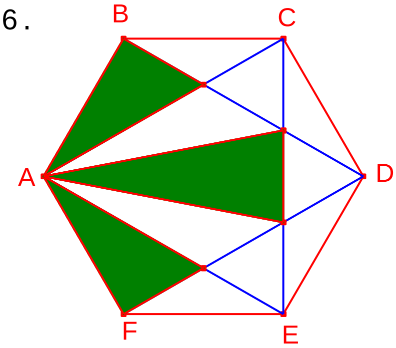
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{EMN}$:

$\dfrac{\overline{EN}}{\sin 120^{o}}=2r$, r radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{EMN}$.

$\overline{EN}=2\cdot 2\cdot \sin 120^{o}=2\sqrt{3}$

1515.- En la figura, ABCDEF és un hexàgon regular de costat $\overline{AB}=6$.

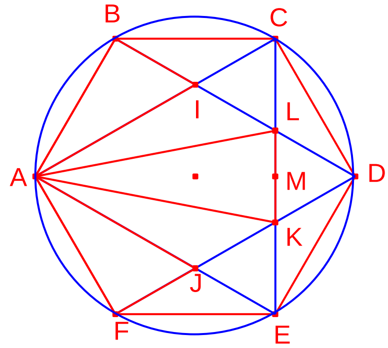
Determineu la suma de les regions ombrejades.



Solució:
Considerem la circumferència circumscrita al l'hexàgon regular.
$\angle CAB=\angle DBC=30^o$.
$\angle ABC=120^o$.
Aleshores, $\angle ABD=90^o$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABI}$:

$\overline{BI}=6\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABI}$ és:

$S_{ABI}=\dfrac{1}{2}6\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{KL}$.
$\angle BDF=60^o$.
$\overline{DL}=\overline{DK}=\overline{CI}=\overline{BI}=2\sqrt{3}$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{BKL}$ és equilàter.
$\overline{KL}=2\sqrt{3}$.
$\overline{AD}=2\overline{AB}=12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMB}$:

$\overline{BM}=2\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$.

$\overline{AM}=\overline{AD}-\overline{BM}=12-3=9$.

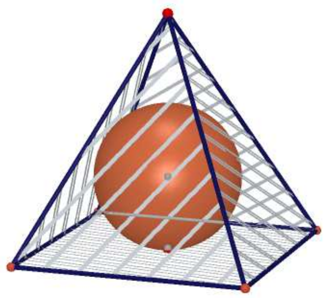
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ és:

$S_{AKL}=\dfrac{1}{2}2\sqrt{3}\cdot 9=9\sqrt{3}$.

L'àrea de la suma de les regions ombrejades és:

$S=2\cdot S_{ABI}+S_{AKL}=2\cdot 6\sqrt{2}+9\sqrt{3}=21\sqrt{3}$.

1516.- Determineu el radi d'una esfera inscrita en una piràmide quadrangular regular si el volum de la piràmide és V i l'angle entre dues cares laterals oposades és α.



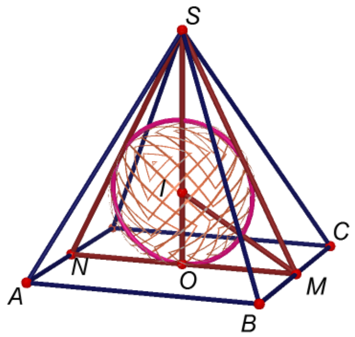
Gúsiev, 899.

Solució:

Siga la piràmide quadrangular regular ABCDS de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{OS} = h$.

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}a^2h.$$



Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.

$\alpha = \angle MSN$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$$a = 2h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

$$V = \frac{1}{3}\left(2h \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 h.$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$a = \sqrt[3]{6V \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Siga I el centre de l'esfera.

Siga $\overline{OI} = r$ el radi de l'esfera.

$$\angle SMN = 90^{o} - \frac{\alpha}{2}.$$

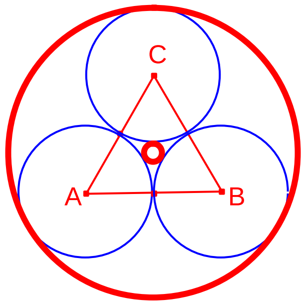
$$\angle IMO = 45^{o} - \frac{\alpha}{4}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IOM}$:

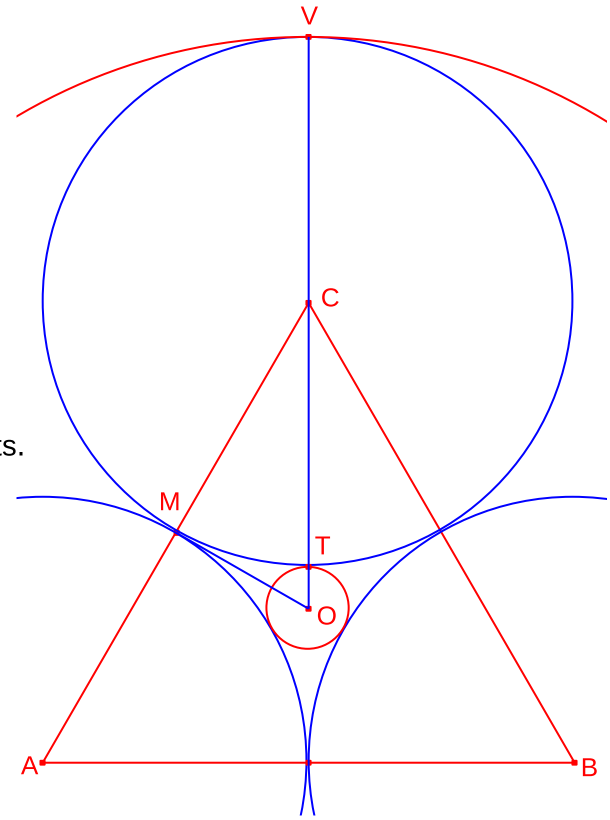
$$r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(45^{o} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(45^{o} - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \sqrt[3]{6V \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

1517.- Donat un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$, amb centre en els tres vèrtexs és dibuixen tres circumferències de radis $\frac{c}{2}$.



Calculeu la proporció entre el radi de la circumferència tangent exterior a les tres anteriors i el radi de la tangent interior.



Solució:
Siga O el centre del triangle equilàter.
Siga O el punt mig del costat $\overline{AC}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOC}$:

$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\overline{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O és el centre de les dues circumferències tangents.
Siga T un de tangència de la circumferència de centre C i radi $\frac{c}{2}$ i la tangent interior.

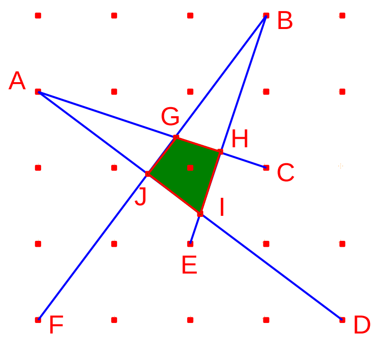
$\overline{OT} = \overline{OC} - \frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{3}c - \frac{1}{2}c = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}c$, radi de la circumferència tangent interior.

Siga V un de tangència de la circumferència de centre C i radi $\frac{c}{2}$ i la tangent exterior.

$\overline{OV} = \overline{OT} + c = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}c + c = \frac{2\sqrt{3}+3}{6}c$, radi de la circumferència tangent exterior.

La proporció entre els radis de la tangent exterior i la interior és:

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OT}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}+3}{6}c}{\frac{2\sqrt{3}-3}{6}c} = 7 + 4\sqrt{3} \approx 13.928.$$



1518.- En la figura, calculeu l'àrea del quadrilàter GHIJ.

Ricardo Barroso

Solució:
Considerem la graella amb les següents coordenades.
$F(0,0)$, $A(0,3)$, $B(3,4)$, $C(3,2)$, $D(4,0)$.
L'equació de la recta que passa pels punts F, B és:

$$r_{FB} \equiv y = \frac{4}{3}x .$$

L'equació de la recta que passa pels punts A, D és:

$$r_{AD} \equiv y = \frac{-3}{4}(x-4) .$$

L'equació de la recta que passa pels punts A, C és:

$$r_{AC} \equiv y-3 = \frac{-1}{3}x .$$

L'equació de la recta que passa pels punts B, E és:

$$r_{BE} \equiv y-1 = 3(x-2) .$$

Notem que $\angle GJI = 90^o$ ja que el producte dels pendents de les rectes r_{FB}, r_{AD} és -1.
Notem que $\angle GHI = 90^o$ ja que el producte dels pendents de les rectes r_{AC}, r_{BE} és -1.
Resolent les equacions de les rectes corresponents les coordenades dels punts G, H, I i J són:

$$G\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right),\ H\left(\frac{12}{5},\frac{11}{5}\right),\ I\left(\frac{32}{15},\frac{7}{5}\right),\ J\left(\frac{32}{25},\frac{48}{25}\right).$$

$$\overline{GJ} = \sqrt{\left(\frac{-9}{25}\right)^2 + \left(\frac{-12}{25}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\overline{JI} = \sqrt{\left(\frac{52}{75}\right)^2 + \left(\frac{-13}{75}\right)^2} = \frac{13}{15}.$$

$$\overline{GH} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\overline{HI} = \sqrt{\left(\frac{-4}{15}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

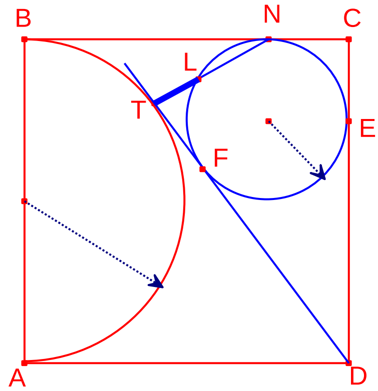
$$S_{GJI} = \frac{1}{2}\overline{GJ}\cdot\overline{JI} = \frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{13}{15} = \frac{13}{50}.$$

$$S_{GHI} = \frac{1}{2}\overline{GG}\cdot\overline{HI} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{5}\frac{4\sqrt{10}}{15} = \frac{4}{150}.$$

$$S_{GHIJ} = S_{GJI} + S_{GHI} = \frac{13}{50} + \frac{4}{15} = \frac{79}{150}.$$

1519.- En la figura, A, B, T, F, N, E són punts de tangència.

Si ABCD és un quadrat, $\overline{CN}=5$, calculeu $\overline{TL}$.



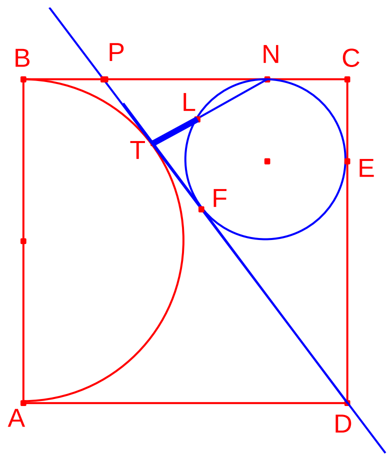
Solució:

$\overline{CE}=\overline{CN}=5$.

$\overline{DE}=\overline{DF}$. $\overline{DA}=\overline{DT}=\overline{DC}$.

Aleshores, $\overline{TF}=\overline{CE}=5$.

La recta DF talla el costat $\overline{BC}$ en el punt P.



Siga $x=\overline{BP}$.

$\overline{PB}=\overline{PT}=x$.

$\overline{PN}=\overline{PF}=x+5$.

$\overline{CP}=x+10$, $\overline{CD}=\overline{BC}=2x+10$, $\overline{DP}=\overline{CD}+\overline{PT}=3x+10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCD}$:

$(3x+10)^2=(x+10)^2+(2x+10)^2$.

Resolent l'equació:

$x=5$.

$\overline{BC}=20$, $\overline{CP}=15$, $\overline{PN}=10$.

Siga $\alpha=\angle CPD$, $\cos\alpha=\dfrac{\overline{CP}}{\overline{DP}}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{5}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PTN}$:

$\overline{TN}^2=10^2+5^2-2\cdot 10\cdot 5\cdot\dfrac{3}{5}$.

$\overline{TN}=\sqrt{65}$.

Aplicant la potència del punt T respecte de la circumferència:

$\overline{TL}\cdot\overline{TN}=\overline{TF}^2$.

$\overline{TL}\sqrt{65}=5^2$.

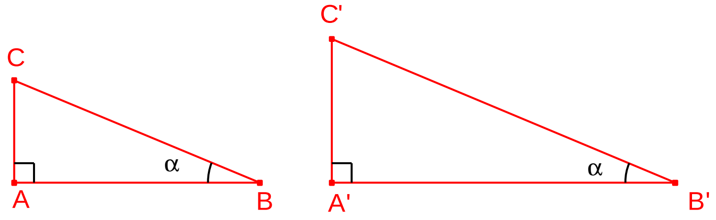
$\overline{TL}=\dfrac{5\sqrt{65}}{13}$.

1520.-

Teorema de Dostor

Donats dos triangles rectangles semblants, el producte de la longitud de les hipotenuses és igual a la suma dels productes de les longituds dels catets homòlegs.

Solució:



Siguen els triangles rectangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$, $A = A' = 90º$.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

$$\frac{a^2}{aa'} = \frac{b^2}{bb'} = \frac{c^2}{cc'}.$$

$$\frac{a^2}{aa'} = \frac{b^2}{bb'} = \frac{c^2}{cc'} = \frac{b^2 + c^2}{bb' + cc'}.$$

$$\frac{a^2}{aa'} = \frac{b^2 + c^2}{bb' + cc'} = \frac{a^2}{bb' + cc'}.$$

Aleshores, $aa' = bb' + cc'$.