Problemes de Geometria per a l'ESO 153

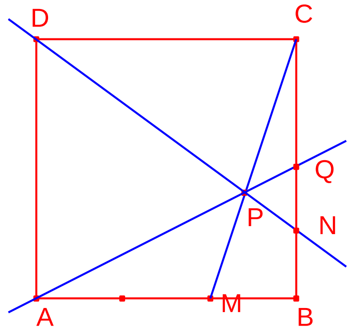
1521.- Siga M un punt del costat $\overline{AB}$ del quadrat ABCD tal que $\overline{AM} = 2\overline{MB}$.

Siga P un punt qualsevol del segment $\overline{MC}$.

La recta AP talla el costat $\overline{BC}$ en el punt Q.

La recta DP talla el costat $\overline{BC}$ en el punt N.

Calculeu $\dfrac{\overline{NQ}}{\overline{QC}}$.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Les rectes AD i CM és tallen en el punt K.

Els triangles $\overset{\Delta}{CBM}$, $\overset{\Delta}{KAM}$ són semblants i de raó 1:2.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AK} = 2\overline{BC} = 2c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{QPN}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{QN}}{c} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AP}}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CQP}$, $\overset{\Delta}{KQP}$ són semblants.

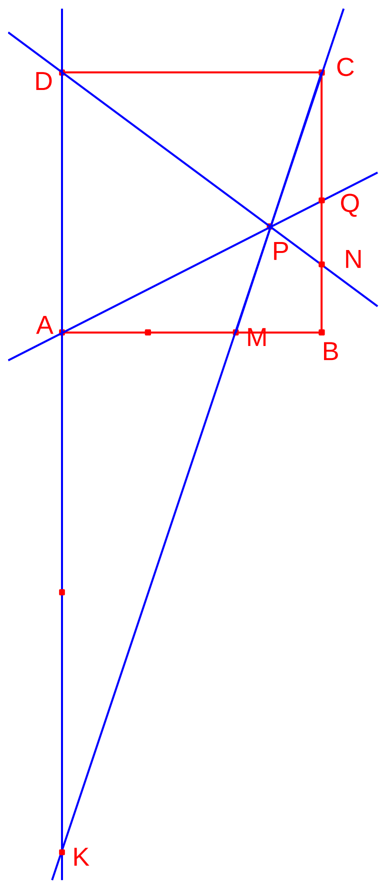
Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{CQ}}{2c} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AP}}$.

Aleshores:

$\dfrac{\overline{QN}}{c} = \dfrac{\overline{CQ}}{2c}$.

Per tant, $\dfrac{\overline{NQ}}{\overline{QC}} = \dfrac{1}{2}$.

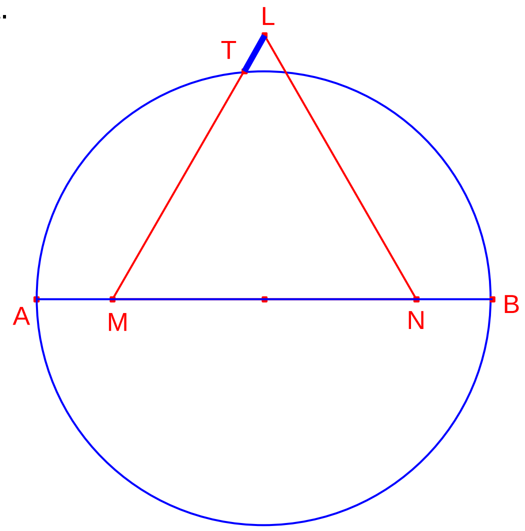


1522.- En la figura, $\overline{AB}$ és el diàmetre de la circumferència.

$\overline{AM} = \overline{BN} = 1$.

El perímetre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{LMN}$ és 12.

Calculeu la mesura del segment $\overline{LT}$.



Solució:

El perímetre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{LMN}$ és 12, aleshores:

$\overline{MN} = \overline{LM} = 4$.

Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AB} = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOL}$:

$\overline{OL} = 2\sqrt{3}$.

Siga $\overline{LT} = x$.

La recta LM talla la circumferència en el punt P.

La recta LN talla la circumferència en el punt Q.

$\overset{\Delta}{LPQ}$ és un triangle equilàter.

Siga $\overline{MP} = \overline{NQ} = y$.

$\overline{LP} = \overline{PQ} = 4 + y$.

$\overline{MT} = 4 - x$.

Aplicant la potència de M respecte de la circumferència:

$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \overline{PM} \cdot \overline{TM}$.

$1 \cdot 5 = y(4 - x)$.

$y(4 - x) = 5$ (1)

Siguen R, S les interseccions de la recta OL i la circumferència:

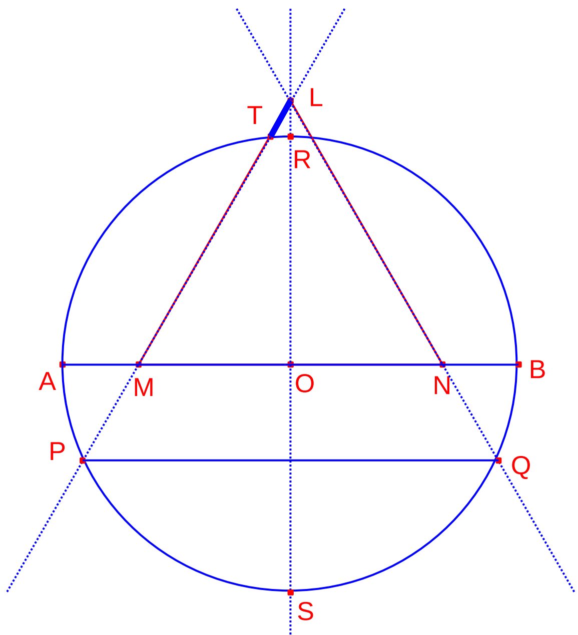
$\overline{LR} = \overline{OL} - \overline{OR} = 2\sqrt{3} - 3$. $\overline{LS} = \overline{OL} + \overline{OS} = 2\sqrt{3} + 3$

Aplicant la potència de L respecte de la circumferència:

$\overline{LT} \cdot \overline{LP} = \overline{LR} \cdot \overline{LS}$.

$x(4 + y) = \left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(2\sqrt{3} + 3\right)$.

$x(4 + y) = 3$ (2)

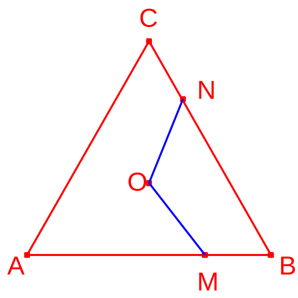


Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} y(4 - x) = 5 \\ x(4 + y) = 3 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = 3 - \sqrt{6} \\ y = -1 + \sqrt{6} \end{cases}$.

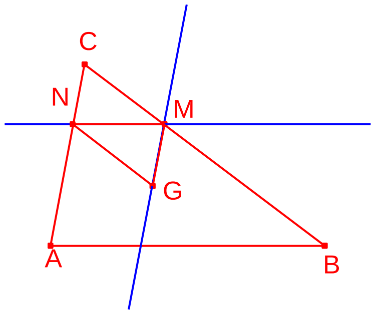
1523.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.



Siguen M i N dos punts dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament, tal que $\overline{AM} = \overline{BN}$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle MON$.

Solució:
O és el circumcentre, $\overline{OB} = \overline{OC}$, $\angle ABO = \angle MCO = 30^o$.
Si $\overline{AM} = \overline{BN}$ aleshores, $\overline{BM} = \overline{CN}$.
Per tant, els triangles $\overset{\Delta}{BMO}$, $\overset{\Delta}{CNO}$.
El triangle $\overset{\Delta}{CNO}$ és el transformat del triangle $\overset{\Delta}{BMO}$ amb un gir de centre O i $\angle BOC = 120^o$.
Aleshores, $\angle MON = 120^o$.

Nota: El quadrilàter OMBN és inscriptible ja que té els angles oposats suplementaris.



1524.- Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

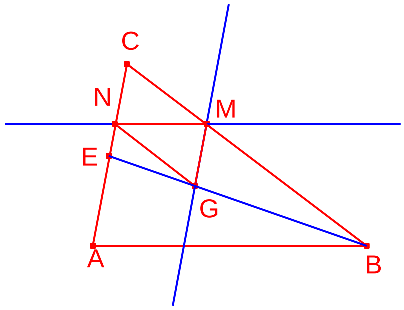
Siguen M i N dos punts dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, respectivament, tal que, $\overline{GM}$ i paral·lel a $\overline{AC}$ i $\overline{MN}$ és paral·lel a $\overline{AB}$.

Si el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{GMN}$ és 4, determineu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Siga E el punt mig del costat $\overline{AC}$.

Aplicant la propietat del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GE}$



Els triangles $\overset{\Delta}{GBM}$, $\overset{\Delta}{EBC}$ són semblants i de raó 2:3.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{GM} = \frac{2}{3}\overline{CE} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}b = \frac{1}{3}b.$$

$$\overline{CM} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}a.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{NMC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 1:3.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{MN} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}c.$$

$\angle NMV = B$, $\angle GMB = C$.

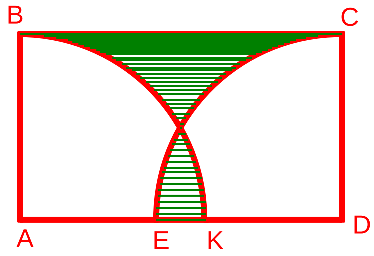
Aleshores, $\angle NMG = A$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{MNG}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 1:3.

El perímetre del triangle, $\overset{\Delta}{ABC}$ és tres vegades el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{NMC}$:

$P_{ABC} = 3 \cdot P_{MNG} = 3 \cdot 4 = 12$.

1525.- En la figura, ABCD és un rectangle $\overline{BC}=3\sqrt{2}$, $\overline{Cd}=\sqrt{6}$.

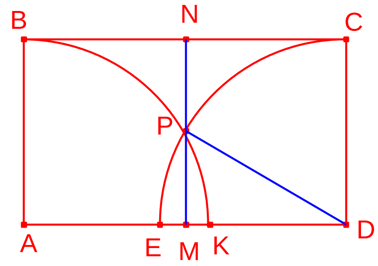


S'han dibuixat dos quadrant de centres A, D.
Determineu l'àrea total de la zona ombrejada.

Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$

Siga P la intersecció dels dos quadrants:



$\overline{DM}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\overline{DP}=\sqrt{6}$.

Siga $\alpha=\angle MDP$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMP}$:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aleshores, $\alpha=30^{o}$.

$\angle PDC=60^{o}$.

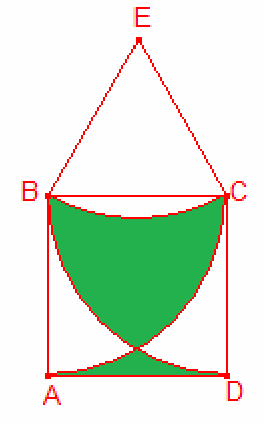
L'àrea ombrejada és igual al doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CNP}$ menys el doble de l'àrea segment circular de 60º i radi $\sqrt{6}$ més el doble de l'àrea de segment circular de 30º i radi $\sqrt{6}$:

$$S=2\left[S_{PNC}-\left(S_{\text{sec tor}60^{o}}-S_{PCD}\right)+S_{\text{sec tor}30^{o}}-S_{CPN}\right].$$

$$S=2\left[S_{PCD}-S_{\text{sec tor}30^{o}}\right]=2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6}\right)^{2}-\frac{1}{12}\pi\left(\sqrt{6}\right)^{2}\right)=3\sqrt{3}-\pi.$$

1526.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat 6 i $\overset{\Delta}{BCE}$ un triangle equilàter.

Hi ha dibuixats dos quadrants de centre B i C i un arc de centre E. Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.

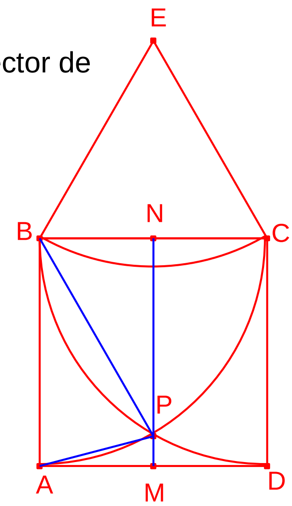
Siga N el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga P la intersecció dels dos quadrants.

$\angle PBC = 60^{o}$

Aleshores, $\angle ABP = 30^{o}$.

L'àrea de la a part superior de la regió ombrejada és igual a l'àrea d'un sector de 60º i radi 6.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNP}$:

$\overline{NP} = 3\sqrt{3}$.

$\overline{PM} = 6 - 3\sqrt{3}$.

L'àrea ombrejada és igual l'àrea del sector circular de 60º i radi 6 més el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMP}$ menys el doble de l'àrea segment circular de 30º i radi 6:

$S = S_{sec\,tor60^{o}} + 2\left[S_{AMP} - \left(S_{sec\,tor30^{o}} - S_{APB}\right)\right]$.

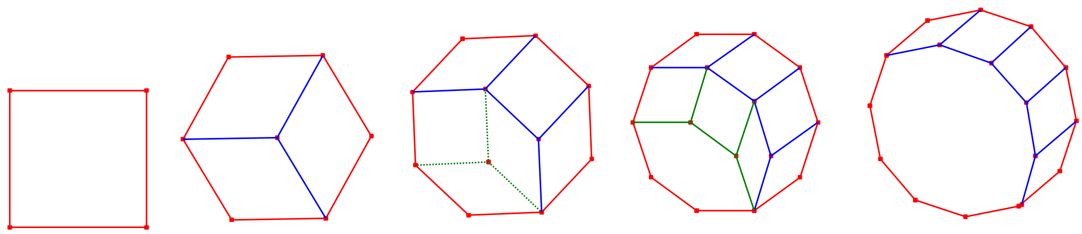
$S = 2\left[S_{AMP} + S_{APB}\right]$.

$$S = 2S_{ABPM} = 2\frac{\overline{AB} + \overline{PM}}{2}\overline{AM} = 2\frac{6 + 6 - 3\sqrt{3}}{2}3 = 36 - 9\sqrt{3}.$$

1527.- Tot polígon convex de 2n costats de mesura 1 i costats oposats paral·lels és pot dividir en paral·lelograms de costat 1.

En quants paral·lelograms queda dividit un polígon convex de 22 costats, amb els costats oposats paral·lels.
Determineu el nombre de paral·lelograms en forma general.

Solució:



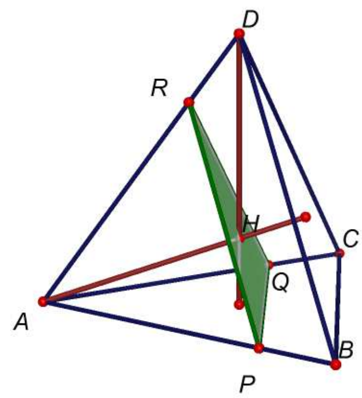
1 3 3+3=6 6+4=10 10+5=15

El nombre de paral·lelogram és la successió de nombres triangulars.

n	Nombre de costats	Nombre de paral·lelograms
2	4	1
3	6	3
4	8	6
5	10	10
6	12	15
n	2n	$\frac{n(n-1)}{2}$

Un polígon convex de 22 costats té en l'interior $\frac{11\cdot 10}{2}=55$ paral·lelograms.

1528.- En un tetraedre regular d'aresta a, calculeu l'àrea de la secció determinada per un plànol que conté el punt d'intersecció de les altures del tetraedre i és paral·lela a una de les cares.

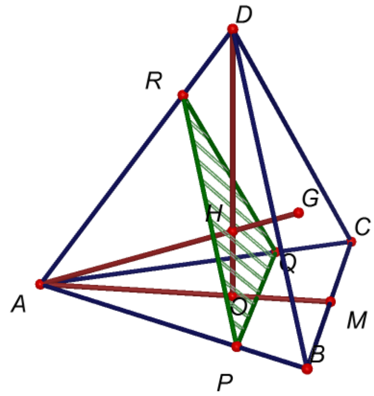


Solució:

Siga $\overline{DO} = \overline{AG}$ altures del tetraedre regular ABCD d'aresta a.

Siga H la intersecció de les dues altures.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:

$$\overline{DO} = \overline{AG} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Siga $x = \overline{OH}$, $\overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOH}$:

$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{6}}{12}a, \ \overline{AH} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ són homotètics de centre d'homotècia A i raó $\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}$.

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3}{4}.$$

Les àrees del dos triangles són proporcionals al quadrat de la raó d'homotècia.

$$\frac{S_{PQR}}{S_{BCD}} = \left(\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

$$S_{PQR} = \frac{9}{16}S_{BCD} = \frac{9}{16}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{64}a^2.$$

1529.- En qualsevol prisma el nombre total de cares C i el nombre total d'arestes compleixen:

$C = \frac{A}{3} + 2$.

Solució:

Siga la base del prisma un polígon de n costats.

El nombre de cares és:

$C = n + 2$.

El nombre V de vèrtexs és:

$V = 2n$.

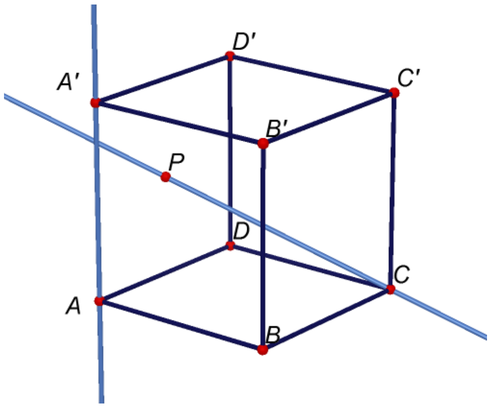
Aplicant la fórmula d'Euler:

$C + V = A + 2$.

$n + 2 + 2n = A + 2$. Resolent l'equació:

$V = 3n$.

$\frac{A}{3} + 2 = \frac{3n}{3} + 2 = n + 2 = C$.

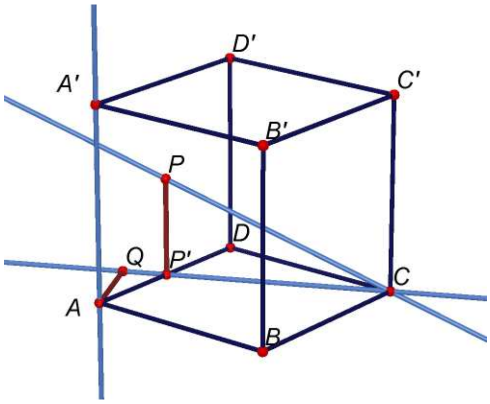


1530.- Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $5\sqrt{5}$.

Siga P el centre de la cara ADD'A'.
Determineu la distància entre les rectes CP i AA'.

Solució 1:

Siga P' la projecció de P sobre l'aresta $\overline{AD}$
La distància entre les rectes PC AA' és igual a la distància entre la recta AA' i el plànol que determinen les rectes PC i P'C.
La distància entre les rectes AA' i PC és igual a la distància de A a la projecció de A sobre la recta P'C.
Siga Q la projecció de A sobre la recta P'C.



$\overline{CD} = 5\sqrt{5}$, $\overline{AP'} = \overline{P'D} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $P'\overset{\Delta}{D}C$:

$$\overline{P'C} = \sqrt{\left(5\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{25}{2}$$

Els triangles rectangles $P'\overset{\Delta}{D}C$, $P'\overset{\Delta}{Q}A$ són semblants.
Aplicant el teorema de tales:

$\dfrac{\overline{AQ}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{\frac{25}{2}}$. Resolent l'equació: la distància entre les rectes AA', PC és: $\overline{AQ} = 5$.

Solució 2:

Considerem el cub ABCDA'B'C'D', en les següents coordenades cartesianes:

$A(0, 0, 0)$, $B\left(5\sqrt{5}, 0, 0\right)$, $C\left(5\sqrt{5}, 5\sqrt{5}, 0\right)$, $D\left(0, 5\sqrt{5}, 0\right)$.

$A'\left(0, 0, 5\sqrt{5}\right)$, $B'\left(5\sqrt{5}, 0, 5\sqrt{5}\right)$, $C'\left(5\sqrt{5}, 5\sqrt{5}, 5\sqrt{5}\right)$, $D'\left(0, 5\sqrt{5}, 5\sqrt{5}\right)$.

Les coordenades del punt P són: $P\left(0, \dfrac{5\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5\sqrt{5}}{2}\right)$.

El vector director de la recta AA' és: $v_{AA'} = (0, 0, 1)$.

El vector director de la recta PC és: $v_{PC'} = (2, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{AP} = \left(0, \frac{5\sqrt{5}}{2}, \frac{5\sqrt{5}}{2}\right).$$

La distància entre les dues rectes és: $d = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AP}, v_{AA'}, v_{PC}\right]\right|}{\left\|v_{AA'} \times v_{PC}\right\|}$

$\left|\left[\overrightarrow{AP}, v_{AA'}, v_{PC}\right]\right| = 5\sqrt{5}$, $\left\|v_{AA'} \times v_{PC}\right\| = \left\|(1, 2, 0)\right\| = \sqrt{5}$. Per tant, $d = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AP}, v_{AA'}, v_{PC}\right]\right|}{\left\|v_{AA'} \times v_{PC}\right\|} = 5$.