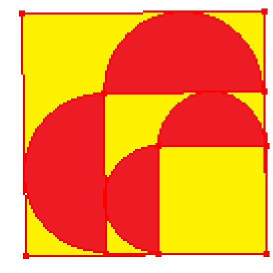
Problemes de Geometria per a l'ESO 154

1531.- En la figura, quina és major, la regió pintada de roig o bé la de groc.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$

El radi de les semicircumferències menudes és

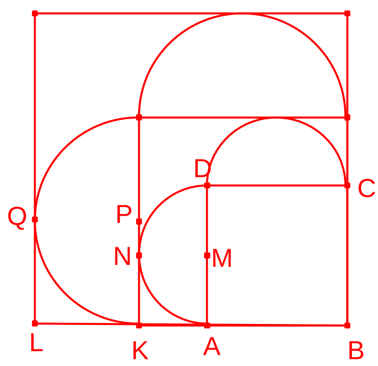
$r_1 = \overline{MA} = \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}c$.

$\overline{BK} = c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c$

El radi de les semicircumferències grans és

$r_2 = \overline{PK} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BK} = \frac{3}{4}c$.

$\overline{BL} = \frac{3}{2}c + \frac{3}{4}c = \frac{9}{4}c$.



L'àrea roja és igual la suma de les àrees de dos cercles de radis $r_1 = \frac{1}{2}c$, $r_2 = \frac{3}{4}c$:

$$S_{roja} = \pi\left(\frac{1}{2}c\right)^2 + \pi\left(\frac{3}{4}c\right)^2 = \frac{13\pi}{16}c^2 \approx 2.5525c^2.$$

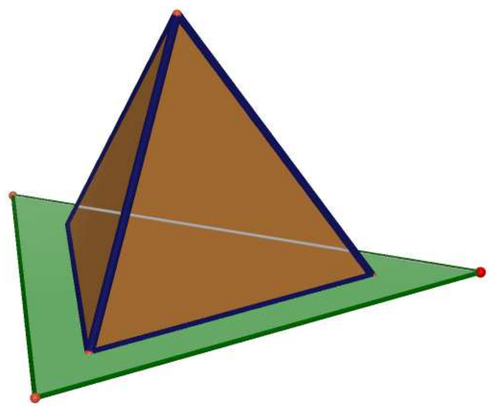
L'àrea de la regió groga és igual a l'àrea del quadrat de costat $\overline{BL} = \frac{9}{4}c$ menys l'àrea de la regió roja:

$$S_{groga} = \left(\frac{9}{4}c^2\right) - \frac{13\pi}{16}c^2 = \frac{81-13\pi}{16}c^2 \approx 2.5100c^2.$$

Aleshores l'àrea de la regió roja és major que la groga.

1532.- Una escultura en forma de tetraedre regular de 10 metres d'aresta es vol rodejar amb un passeig de gespa d'1 metre d'ample.

Determineu l'àrea del passeig de gespa.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ base del tetraedre $\overline{AB} = 10$.

Siga $\overset{\Delta}{KLM}$ la part exterior del passeig.

Siga B' la projecció de B sobre el costat $\overline{KL}$.

$\overline{BB'}$.

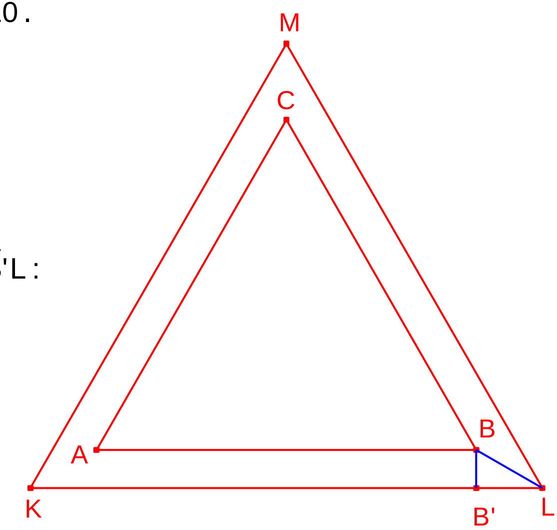
$\angle BLB' = 30^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BB'L}$:

$\overline{B'L} = \sqrt{3}$.

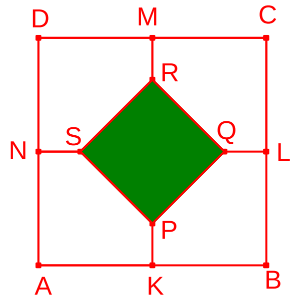
$\overline{KL} = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{B'L} = 10 + 2\sqrt{3}$.

L'àrea del passeig és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:



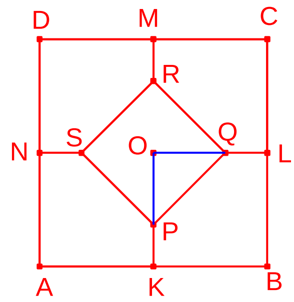
$$S_{passeig} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(10 + 2\sqrt{3}\right)^2 - 10^2\right) = 30 + 3\sqrt{3} = 35.1962 m^2.$$

1533.- En la figura ABCD i PQRS són dos quadrats concèntrics.



K, L, M, N són els punts migs dels costats del quadrat ABCD.
El quadrat ABCD ha quedar dividit en 5 parts d'igual àrea.
Si $\overline{AB} = c$ calculeu la mesura del segment $\overline{PK}$.

Solució:
Siga O el centre dels dos quadrats.



$S_{PQRS} = \frac{1}{5}c^2$.

$S_{PQRS} = \overline{PQ}^2$.

$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{5}}{5}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

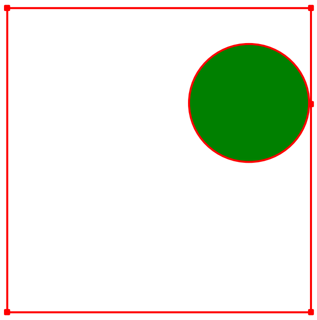
$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{PQ}$.

$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{5}}{5}c = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\overline{OK} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}c$.

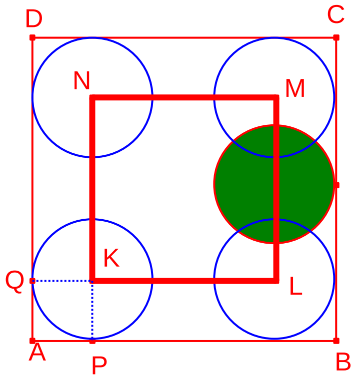
$\overline{PK} = \overline{OK} - \overline{OP} = \frac{1}{2}c - \frac{\sqrt{10}}{10}c = \frac{5-\sqrt{10}}{10}c$.

1534.- Una circumferència de radi 2 fa una volta completa per l'interior del quadrat al llarg del seu perímetre.



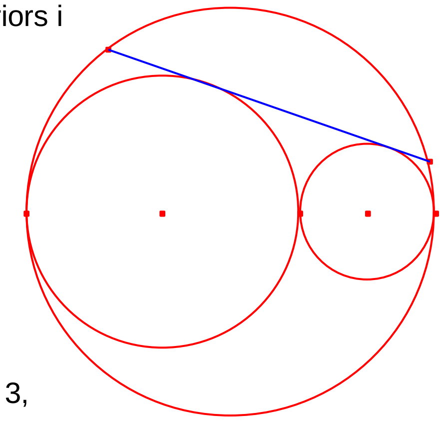
El costat del quadrat és 10.
Quina longitud recorre el centre del cercle?.

Solució:



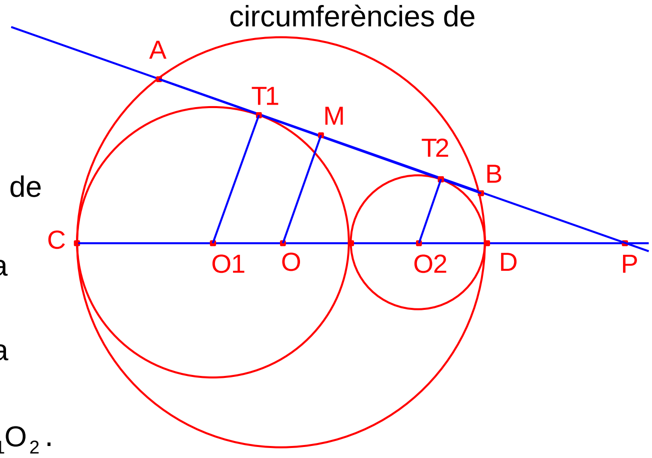
Siga ABCD el quadrat exterior de costat $\overline{AB} = 10$.
El centre recorre el perímetre del quadrat KLMN.
El seu costat és $\overline{KN} = \overline{AB} - 2\overline{KP} = 10 - 2 \cdot 2 = 6$.
El seu perímetre és $p_{KLMN} = 4 \cdot 6 = 24$.

1535.- Dues circumferències de radis 3 i 6 són tangents exteriors i són tangents interior a una circumferència de radi 9.



La circumferència de radi 9 té una corda tangent a les altres dues circumferències.
Calculeu la longitud de la corda.

Solució:
Siguen O_1, O_2 els centres de les circumferències de radis 6 i 3, respectivament.
Siguen C, D els punts de tangència de les circumferències de radis 6, 3 i la circumferència de radi 9. $\overline{CD} = 18$.



Siga O el centre de la circumferència de radi 9.
Siga $\overline{AB}$ la corda tangent a les circumferències de radis 6 i 3.
Siguen T_1, T_2 és punts de tangència de la corda amb les dues circumferències.
La recta que passa per O i és perpendicular a la corda $\overline{AB}$ passa pel punt mig M de la corda.
Siga P la intersecció de la recta AB i la recta O_1O_2.
Siga $x = \overline{PD}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PT_1O_1}$, $\overset{\Delta}{PT_2O_2}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{6}{12+x} = \frac{3}{3+x}$$. Resolent l'equació:

$x = 6$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PMO}$, $\overset{\Delta}{PT_2O_2}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OM}}{6+x} = \frac{3}{3+x}.$$

$$\frac{\overline{OM}}{12} = \frac{3}{9}$$. Resolent l'equació:

$\overline{OM} = 4$.

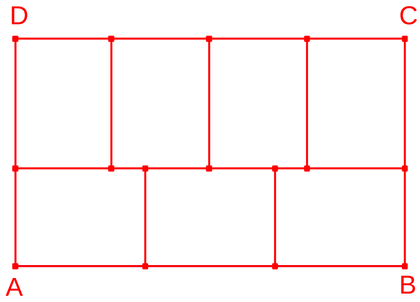
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMO}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AM} = 4\sqrt{5}.$$

1536.- El rectangle ABCD s'ha dividit en 7 rectangles iguals.

Si l'àrea del rectangle és 336, calculeu el seu perímetre.



Solució:

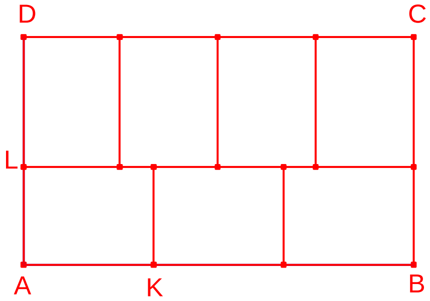
Siga $x=\overline{AK}$, $y=\overline{AL}$ costats dels 7 rectangles.

$\overline{AB}=3\overline{AK}=4\overline{AL}$.

Aleshores:

$y=\frac{3}{4}x$.

$\overline{AB}=3x,\ \overline{AD}=x+y=\frac{7}{4}x$.



L'àrea del rectangle ABCD és:

$3x\cdot\frac{7}{4}x=336$. Resolent l'equació:

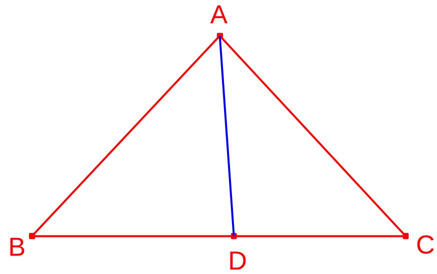
$x=8$.

$\overline{AB}=3x=24,\ \overline{AD}=\frac{7}{4}x=16$.

El perímetre del rectangle ABCD és:

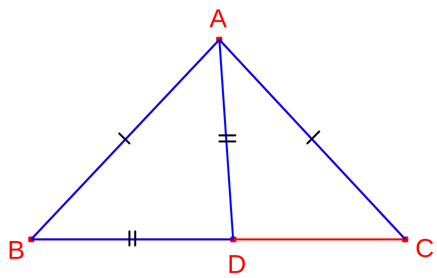
$P_{ABCD}=2(24+14)=76$.

1537.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=\overline{AD}$.



Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{AD}=\overline{BD}$, $\angle DAC=39^{o}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BAD$.

Solució:
Siga $\angle BAD=\alpha$.

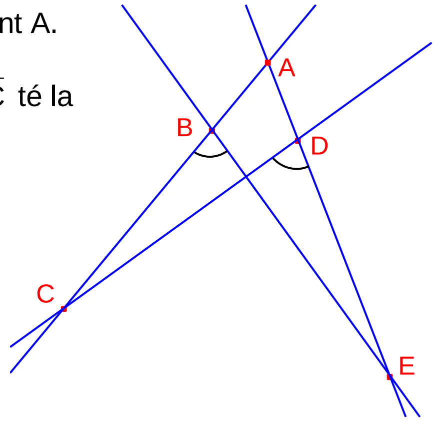


El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles $\overline{AD}=\overline{BD}$, aleshores:
$B=\angle BAD=\alpha$.

el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles $\overline{AB}=\overline{AD}$, aleshores:
$C=B=\alpha$.
$A=39^{o}+\alpha$
La suma dels angles del triangle és 180º:
$\alpha+39^{o}+\alpha+\alpha=180^{o}$. Resolent l'equació:
$\alpha=47^{o}$.

1538.- En la figura les rectes ABC i ADE s'intersecten en el punt A.

Si $\angle CBE = \angle CDE$ proveu que el rectangle de costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ té la mateixa àrea que el rectangle de costats $\overline{AD}$, $\overline{DE}$.

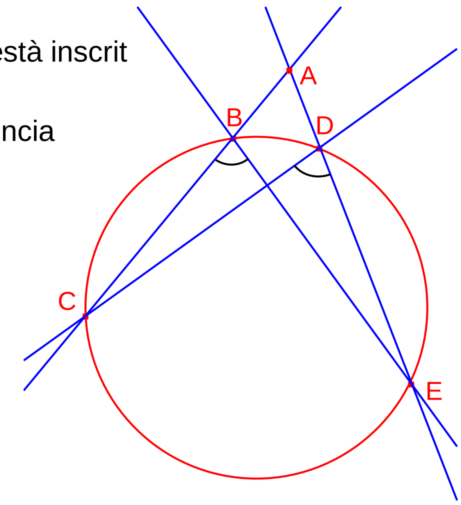


Solució:

Si en el quadrilàter BCED $\angle CBE = \angle CDE$ el quadrilàter està inscrit en una circumferència.

Calculant la potència del punt A respecte de la circumferència circumscrita al quadrilàter BCED:

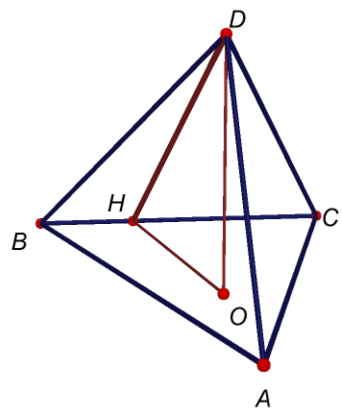
$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{AE}$.



1539.- Les cares ABC i BCD d'un tetraedre ABCD formen 30º.

Si l'àrea del la cara ABC és 120, i l'àrea de la cara BCD és 80 i $\overline{BC} = 10$.
Determineu el volum del tetraedre.

Solució:
Siga O el peu de l'altura sobre del tetraedre des del vèrtex D.
Siga H la perpendicular a l'aresta $\overline{BC}$ que passa per D.
$\angle DHO = 30^{o}$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 80:

$\frac{10 \cdot \overline{DH}}{2} = 80$. Resolent l'equació:

$\overline{DD} = 16$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HOD}$:

$\overline{OD} = \frac{1}{2} 16 = 8$, altura del tetraedre sobre la base ABC.

El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{3} 120 \cdot 8 = 320.$$

1540.- El vèrtex P del quadrat PQRS és dobla fins coincidir amb R.

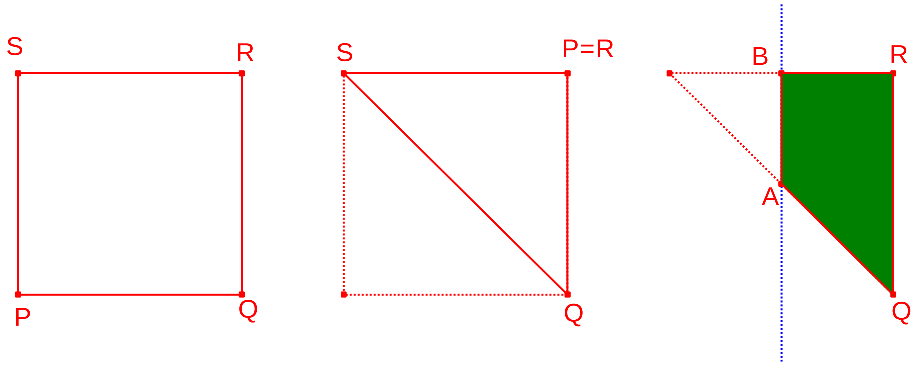
Després, el vèrtex S és dobla fins coincidir en P.

La figura resultat té àrea $9\,cm^2$.

Calculeu l'àrea del quadrat PQRS.

KöMaL, K445. Gener 2015.

Solució:



Siga $\overline{PQ} = c$, costat del quadrat PQRS.

Quan P coincideix amb R, doblem per la mediatriu del segment $\overline{PR}$, que és la diagonal $\overline{QS}$ del quadrat. El resultat és el triangle $\overset{\Delta}{QRS}$.

Quan en el triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ fem coincidir S amb R, doblem per la mediatriu del segment $\overline{SR}$.

Siga A i B els punts dels costat $\overline{SQ}$, $\overline{SR}$ que pertanyen a la mediatriu del segment $\overline{SR}$.

La figura resultant és el trapezi rectangle ABRQ.

$\overline{QR} = c$, $\overline{RB} = \overline{AB} = \frac{c}{2}$.

L'àrea del trapezi ABRQ és:

$$S_{ABRQ} = \frac{\overline{QR} + \overline{AB}}{2}\overline{RB} = 9.$$

$$\frac{c + \frac{1}{2}c}{2}\frac{1}{2}c = 9.$$

Simplificant:

$c^2 = 24$.

$S_{PQRS} = c^2 = 24$.