Problemes de Geometria per a l'ESO 155

1541.- En la figura, $\overline{AB}$ és paral·lel a $\overline{DC}$.

P és un punt del costat $\overline{DC}$ tal que $\overline{PB}$ és perpendicular a $\overline{DC}$.

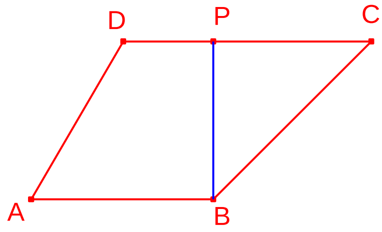
El triangle $\overset{\Delta}{PBC}$ és isòsceles.

$\overline{AB} = \overline{AD} = 48\text{cm}$, $A = 60^\circ$. Calculeu:

a) El perímetre del trapezi ABCD.

b) l'àrea del trapezi ABCD.

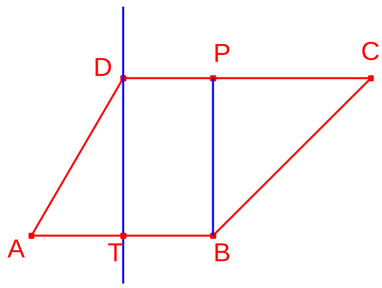
c) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:

Siga T la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga $x = \overline{BP} = \overline{TD}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATD}$:

$AT = 24$, $\overline{TD} = \overline{BP} = 24\sqrt{3}$.

$\overline{CP} = \overline{BP} = 24\sqrt{3}$.

$\overline{TB} = \overline{DP} = 48 - 24 = 24$.

$\overline{Dc} = \overline{DP} + \overline{CP} = 24 + 24\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PBC}$:

$\overline{BC} = \overline{BP}\sqrt{2} = 24\sqrt{6}$.

El perímetre del trapezi ABCD és:

$$P_{ABCD} = \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} = 2 \cdot 48 + 24\sqrt{6} + 24 + 24\sqrt{3} = 24\left(5 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) \approx 220.36\text{cm}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}\overline{BP} = \frac{48 + 24 + 24\sqrt{3}}{2} 24\sqrt{3} = 864\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 2360.49\text{cm}^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BP}}{2} = 576\sqrt{3} \approx 997.66\text{cm}^2.$$

1542.- Siga ABCD un quadrat i siga P un punt qualsevol del costat $\overline{BC}$.

Pel punt B tracem una perpendicular a la recta DP que talla la recta DC en el punt Q. Calculeu la mesura de l'angle $\angle PQC$.

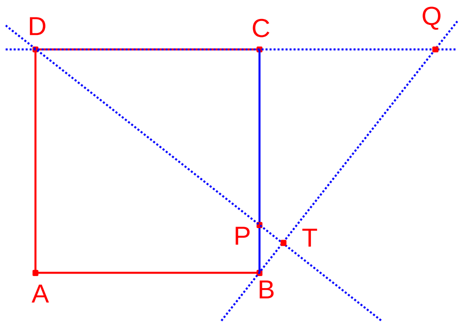
Solució:

Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{C}P$, $B\overset{\Delta}{C}Q$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CP} = \overline{CQ}$.

El triangle rectangle $P\overset{\Delta}{C}Q$ és isòsceles, aleshores:

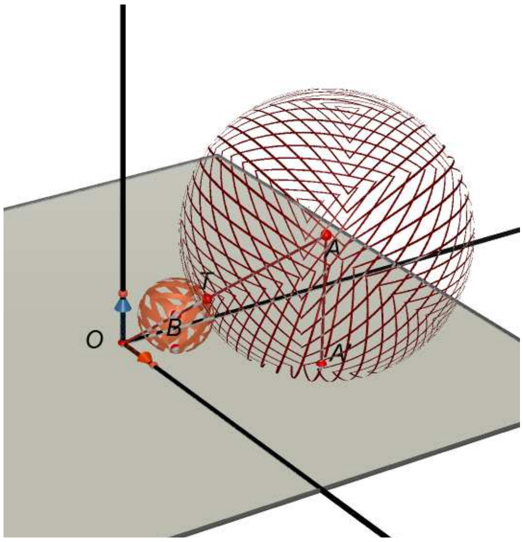
$\angle PQC = 45^o$.



1543.- Una esfera de radi R reposa sobre tres parets, que formen entre elles angles rectes, d'una habitació i és tangent a les tres parets.

Es vol col·locar una altra esfera més menuda i tangent a les tres parets i a la primera esfera.
Determineu el radi de l'esfera menuda.

Solució:
Siga O el punt on s'intersecten les tres parets.
Siga A el centre de l'esfera de radi R.
Siga B el centre de l'esfera menuda.
Siga T el punt de tangència de les dues esferes.
Siga r el radi de l'esfera menuda.



$\overline{OA} = R\sqrt{3}$.

$\overline{OB} = r\sqrt{3}$.

$\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{BT} + \overline{AT}$.

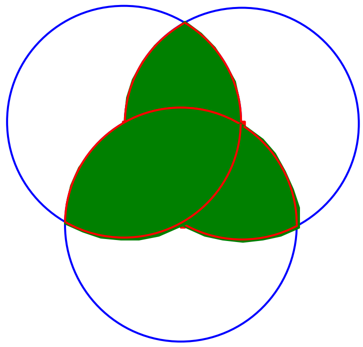
$R\sqrt{3} = r\sqrt{3} + r + R$.

$\left(\sqrt{3} + 1\right)r = \left(\sqrt{3} - 1\right)R$.

$r = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}R = \left(2 - \sqrt{3}\right)R$.

1544.- Tres circumferències de radi 1, cadascuna d'elles passa pel centre de les altres dues.

Calculeu l'àrea i el perímetre de la zona ombrejada.



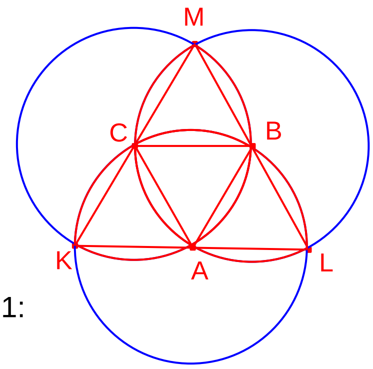
Solució:

Siguen A, B, C els centres de les tres circumferències de rai 1.

$\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter de costat 1.

Siguen K, L, M les altres interseccions.

$\overset{\Delta}{KLM}$ és un triangle equilàter de costat 2.



El perímetre està format per sis arcs de circumferència de radi 1 i 60º.
Aleshores el perímetre és igual a la longitud de circumferència de radi 1:
$P = 2\pi$.

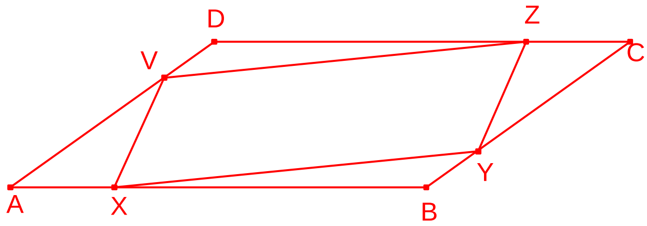
L'àrea és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ més l'àrea de sis segments circulars de radi 1 i 60º:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}2^2 + 6\left(\frac{1}{6}\pi\cdot 1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right) = \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1545.- Siguen X, Y, Z, V punts dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ del paral·lelogram ABCD tals que $\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{DV}}{\overline{AV}} = k$ on k és un valor menor que $\frac{1}{2}$.

Determineu k a fi que l'àrea del quadrilàter XYZV siga el 68% de l'àrea del paral·lelogram ABCD.

KöMaL, C1276, Febrer 2015.



Solució:

Siga $\alpha = \angle BAC$.

Siga $\overline{AX} = a$, $\overline{BY} = b$.

$\overline{CZ} = a$, $\overline{DV} = b$, $\overline{BX} = \overline{DZ} = ka$, $\overline{CY} = \overline{AV} = kb$.

$\overline{AB} = a(1+k)$, $\overline{AD} = b(1+k)$.

XYZV és un paral·lelogram.

L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$S_{ABCD} = (1+k)^2 ab \cdot \sin\alpha$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AXV}$, $\overset{\Delta}{CZY}$ són iguals la seua àrea és:

$S_{AXV} = \frac{1}{2}(1+k)ab \cdot \sin\alpha$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BXY}$, $\overset{\Delta}{DZV}$ són iguals la seua àrea és:

$S_{BXY} = \frac{1}{2}kab \cdot \sin(180º - \alpha) = \frac{1}{2}kab \cdot \sin\alpha$.

L'àrea del paral·lelogram XYZV és igual a l'àrea del paral·lelogram ABCD menys 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AXV}$:

$S_{XYZV} = S_{ABCD} - 4S_{AXV} = (1+k)^2 ab \cdot \sin\alpha - 2kab \cdot \sin\alpha = (1+k^2)ab \cdot \sin\alpha$.

L'àrea del paral·lelogram XYZV és el 63% de l'àrea del paral·lelogram ABCD:

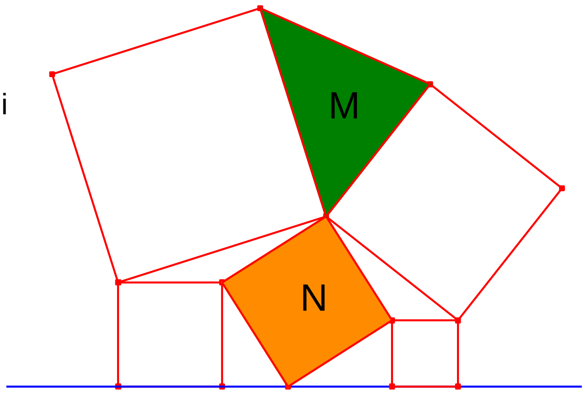
$$\frac{S_{XYZV}}{S_{ABCD}} = \frac{(1+k^2)ab \cdot \sin\alpha}{(1+k)^2 ab \cdot \sin\alpha} = \frac{68}{100}.$$

Simplificant:

$\frac{1+k^2}{(1+k)^2} = \frac{17}{25}$. Resolent l'equació:

$k = \frac{1}{4}$.

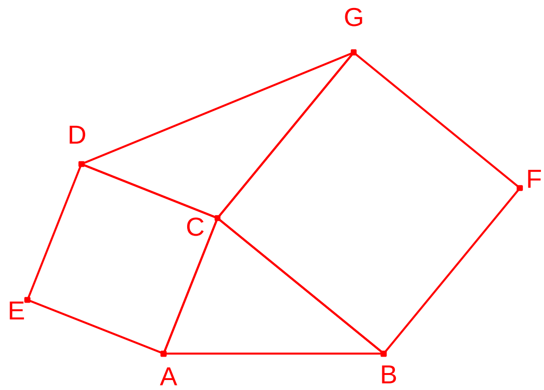
1546.- En la figura, hi ha 5 quadrats.



Determineu la proporció entre les àrees del quadrat N i el triangle M.

Solució:
Propietat:

Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si sobre l'exterior dels costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ és dibuixen els quadrats ACDE i BFGC, respectivament, aleshores les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CGD}$ són iguals.



Siga $\overline{HI} = a$, $\overline{IJ} = b$.
Aleshores:
$\overline{JK} = a$, $\overline{KL} = b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IJU}$:

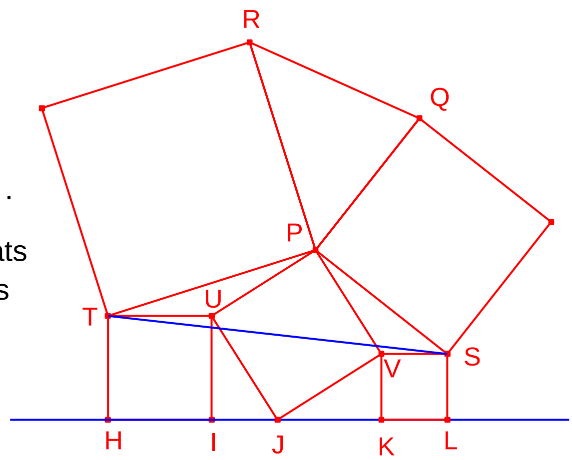
$\overline{UJ}^2 = a^2 + b^2$.

L'àrea del quadrat N és: $S_N = a^2 + b^2$.

Aplicant la propietat al triangle $\overset{\Delta}{IJU}$:

$$S_{IJU} = S_{TUP} = \frac{1}{2}ab$$

Aplicant la propietat al triangle $\overset{\Delta}{JKV}$: $S_{JKV} = S_{VSP} = \frac{1}{2}ab$.



L'àrea del pentàgon HLSPT és igual a l'àrea dels quadrats de costats a, b, més l'àrea del quadrat N, més 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IJU}$:

$$S_{HLSPT} = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right).$$

$$S_{HLSPT} = 2a^2 + 2b^2 + 2ab.$$

L'àrea del trapezi HLST és: $S_{HLSPT} = \frac{a+b}{2}(2a+2b) = (a+b)^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TSP}$ és igual a l'àrea del pentàgon HLSPT menys l'àrea del trapezi HLST:

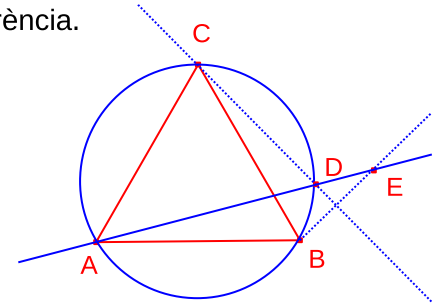
$$S_{TSP} = S_{HLSPT} - S_{HLST} = a^2 + b^2.$$

Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TSP}$ és igual a l'àrea del quadrat N.

Aplicant la propietat al triangle $\overset{\Delta}{TSP}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{TSP}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.
Aleshores, les àrees del quadrat N i del triangle M són iguals.

1547.- Un Triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ està inscrit en una circumferència.



Siga D un punt de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.
Siga E el punt simètric de B respecte de la recta CD.
Proveu que A, D i E estan alineats.
Crux CC96.

Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ costat del triangle equilàter.

Siga $\alpha=\angle DAB$.

$\angle CAD=60^{o}-\alpha$.

Per ser angles inscrit en la circumferència i abraçar el mateix arc:

$\angle BCD=\angle DAB=\alpha$.

$\overline{CB}=\overline{CE}=a$, $\angle DCE=\angle BCD=\alpha$.

$\angle ACE=60^{o}+2\alpha$.

Per ser $\overset{\Delta}{ACE}$ isòsceles:

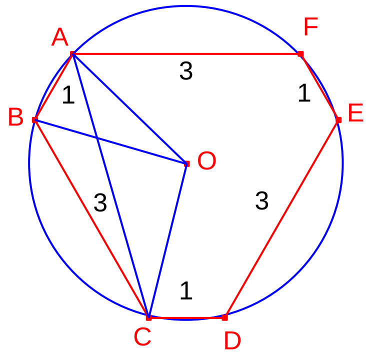
$$\angle CAE=\angle AEC=\frac{180^{o}-\angle ACE}{2}=60^{o}-\alpha.$$

Aleshores, $\angle CAE=\angle EAD=60^{o}-\alpha$, aleshores, A, D i E estan alineats.

1548.- Un hexàgon H està inscrit en un cercle.

L’hexàgon té tres costats de longitud 1 i altres tres costats de longitud 3.
Cada costat de longitud 1 està entre dos costats de longitud 3 i cada costat de longitud 3 està entre tres costats de longitud 1.
Determineu l’àrea de l’hexàgon H.
Crux CC86.

Solució:
Siga ABCDEF l’hexàgon inscrit en la circumferència de centre O, $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}=1$, $\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FA}=3$.
Siga $\overline{OA}=r$ radi de la circumferència.
Siga $\alpha=\angle AOB$, $\beta=\angle BOC$.
$3\alpha+3\beta=360^o$. Aleshores, $\alpha+\beta=120^o$.
$\angle AOC=120^o$.



Per ser angle inscrit en la circumferència, $\angle ABC=\frac{1}{2}240^o=120^o$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2=1^2+3^2-2\cdot1\cdot3\cdot\cos120^o=13$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOC}$:
$13=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos120^o$. Simplificant:
$r^2=\frac{13}{3}$.

L’àrea de l’hexàgon ABCDEF és igual a tres vegades l’àrea del quadrilàter ABCO:
$S_{ABCDEF}=3\cdot S_{ABCO}=3(S_{ABC}+S_{AOC})$
$S_{ABCDEF}=3\left(\frac{1}{2}1\cdot3\cdot\sin120^o+\frac{1}{2}\frac{13}{3}\sin120^o\right)=\frac{11}{2}\sqrt{3}$.

1549.- El quadrilàter ABCD té les següents propietats:

1. El punt mig O del costat $\overline{AB}$ és el centre de una semicircumferència.
2. Els costats $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ i $\overline{CB}$ són tangent a la semicircumferència.

Proveu que $\overline{AB}^2 = 4 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

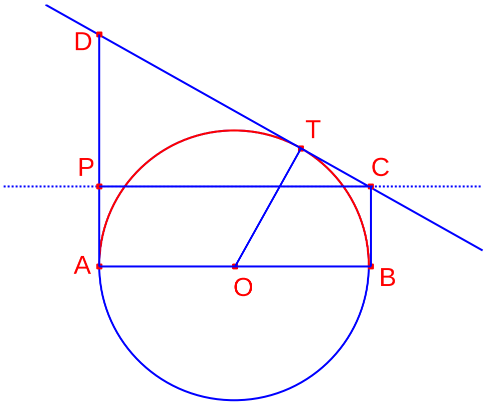
Crux CC81.

Solució:

$\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ són perpendicular al diàmetre $\overline{AB}$.

Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{DC}$.

$\overline{AD} = \overline{DT}$, $\overline{BC} = \overline{CT}$.



Siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{AD}$.

$\overline{PC} = \overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPD}$:

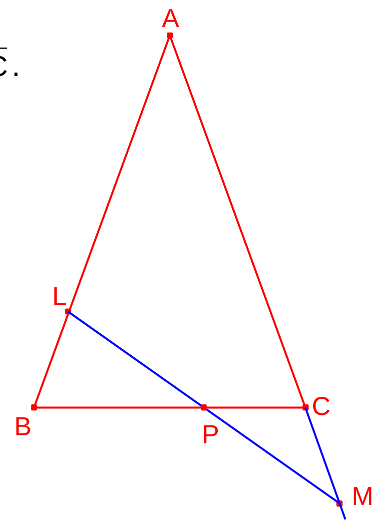
$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{DC}^2.$$

$$\overline{AB}^2 + \left(\overline{AD} - \overline{BC}\right)^2 = \left(\overline{AD} + \overline{BC}\right)^2.$$

Simplificant:

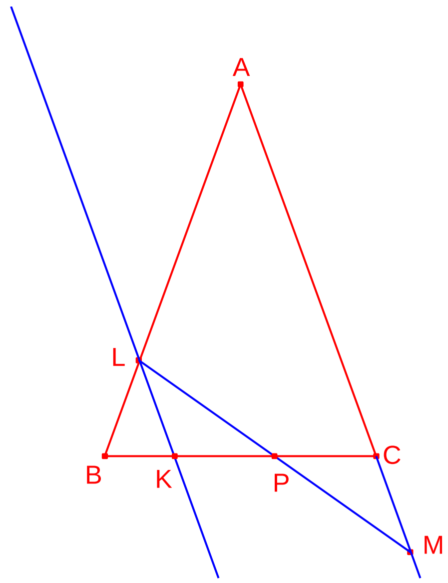
$$\overline{AB}^2 = 4 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

1550.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle isòsceles $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Proveu que si $\overline{LP} = \overline{PM}$, aleshores $\overline{LB} = \overline{CM}$.
Crux CC21.



Solució 1:
Pel punt L tracem una paral·lela al costat $\overline{AC}$ que talla el costat $\overline{BC}$ en el punt K.

El triangle $\overset{\Delta}{BKL}$ és isòsceles
Aleshores, $\overline{LB} = \overline{LK}$.
$\angle PLK = \angle PMC$, $\angle KPL = \angle CPM$, $\overline{LP} = \overline{PM}$.
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{KPL}$, $\overset{\Delta}{CPM}$ són iguals.
Aleshores,. $\overline{LK} = \overline{CM}$
Per tant, $\overline{LB} = \overline{CM}$.



Solució 2:
Siga $\alpha = \angle ABC$, $\angle BCM = 180^o - \alpha$.
$\angle BPL = \angle CPM = \beta$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BPL}$

$$\frac{\overline{LP}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BL}}{\sin\beta} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CPM}$

$$\frac{\overline{PM}}{\sin(180^o - \alpha)} = \frac{\overline{CM}}{\sin\beta} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{PM}} \cdot \frac{\sin(180^o - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BL}}{\overline{CM}}.$$

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{CM}} = 1.$$