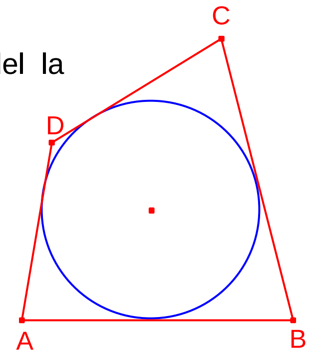
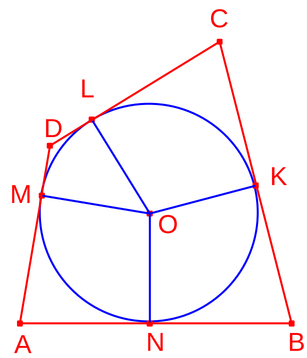
Problemes de Geometria per a l'ESO 156

1551.- Siga un quadrilàter circumscrit a una circumferència.
La proporció entre el perímetre del quadrilàter i el perímetre del la circumferència és igual a la proporció entre l'àrea del quadrilàter i l'àrea del cercle.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència i r el seu radi.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència i el quadrilàter.



$\overline{AM} = \overline{AN} = x$, $\overline{BN} = \overline{BK} = y$, $\overline{CK} = \overline{CL} = z$, $\overline{DL} = \overline{DM} = y$.

El perímetre del quadrilàter ABCD:

$P_{ABCD} = 2(x + y + z + t)$.

La longitud de la circumferència és:

$L = 2\pi r$.

La proporció entre el perímetre del quadrilàter i la longitud de la circumferència és:

$$\frac{P_{ABCD}}{L} = \frac{2(x + y + z + t)}{2\pi r} = \frac{x + y + z + t}{\pi r}.$$

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma de 8 triangles rectangles:

$S_{ABCD} = xr + yr + zr + tr = (x + y + z + t)r$.

L'àrea del cercle és:

$S_c = \pi r^2$.

La proporció entre les àrees del quadrilàter ABCD i el cercle de radi r és:

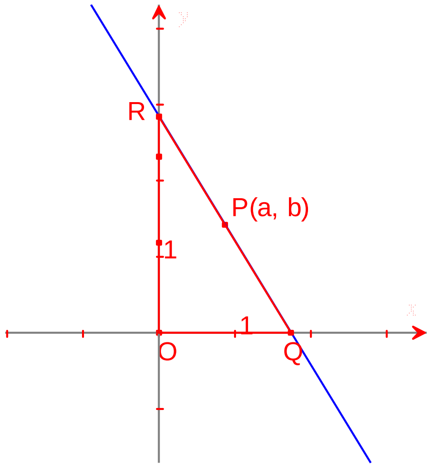
$$\frac{S_{ABCD}}{S_c} = \frac{(x + y + z + t)r}{\pi r^2} = \frac{x + y + z + t}{\pi r}.$$

1552.- El punt $P(a, b)$ està situat en el primer quadrant.

Una recta que passa pel punt P talla els eixos coordenats en els punts Q i R de forma que el triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ té àrea 2ab (O és l'origen de coordenades).
Demostreu que hi ha tres rectes possibles que satisfan aquesta condició.
Crux CC76.

Solució:
$a, b > 0$. Ja que P pertany al primer quadrant.
Siga la recta $y = m(x-a)+b$ que passa pel punt P.
Determinem el valor m a fi que acomplesca la condició.
Siga Q el punt de tal de la recta i l'eix d'abscisses.
Les seues coordenades són:

$$Q\left(\frac{ma-b}{m}, 0\right)$$



Siga R la intersecció de la recta i l'eix d'ordenades.
Les seues coordenades són:
$R(0, -am+b)$.

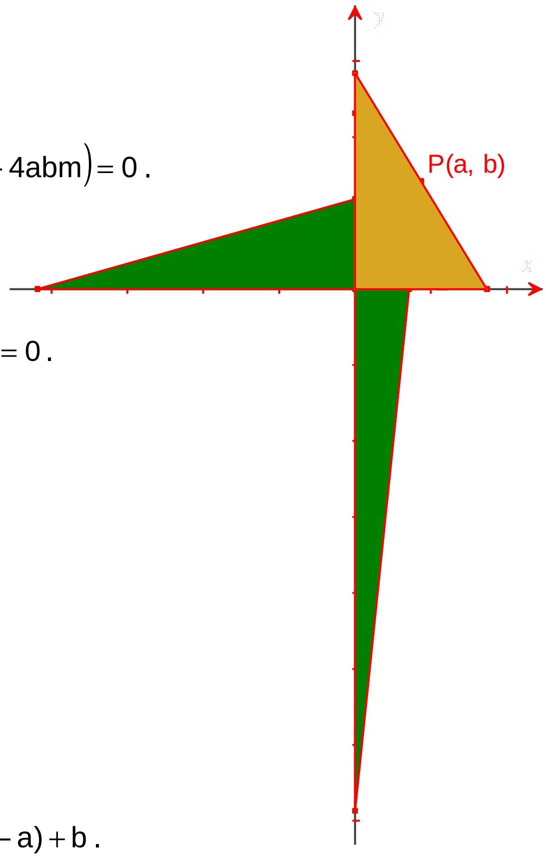
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ és:

$$S_{OQR} = \frac{1}{2}\left|\frac{ma-b}{m}(-ma+b)\right|.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ és àrea 2ab:

$$\left|\frac{ma-b}{m}(-ma+b)\right| = 4ab.$$

Elevant al quadrat:
$(am-b)^4 - (4abm)^2 = 0$. $\left((am-b)^2 + 4abm\right)\left((am-b)^2 - 4abm\right) = 0$.
Aleshores:
$(am-b)^2 + 4abm = 0$, a bé, $(am-b)^2 - 4abm = 0$



Si $(am-b)^2 + 4abm = 0$. Simplificant: $a^2m^2 + 2abm + b^2 = 0$.
Resolent l'equació en la incògnita m:

$$m = -\frac{b}{a}.$$

Si $(am-b)^2 - 4abm = 0$. Simplificant:
$a^2m^2 - 6abm + b^2 = 0$.
Resolent l'equació en la incògnita m:

$$m = \left(3+\sqrt{8}\right)\frac{b}{a},\quad m = \left(3-\sqrt{8}\right)\frac{b}{a}$$

Els tres pendents són distints.
Les rectes solucions del problema són:

$$y = \frac{-b}{a}x + 2b \quad y = \left(3+\sqrt{8}\right)\frac{b}{a}(x-a)+b,\quad y = \left(3-\sqrt{8}\right)\frac{b}{a}(x-a)+b.$$

Problema 2

El punt $P(a,b)$ està situat en el primer quadrant.

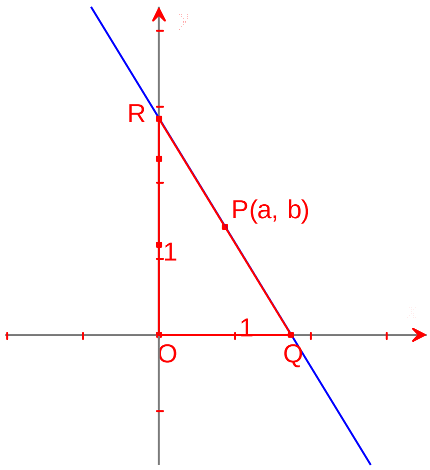
Una recta que passa pel punt P talla els eixos coordenats en els punts Q i R de forma que el triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ té àrea 4ab (O és l'origen de coordenades).

Demostreu que hi ha quatre rectes possibles que satisfan aquesta condició.

Solució:

$a, b > 0$. Ja que P pertany al primer quadrant.

Siga la recta $y = m(x-a)+b$ que passa pel punt P.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ és:

$$S_{OQR} = \frac{1}{2}\left|\frac{ma-b}{m}(-ma+b)\right|.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ és àrea 4ab:

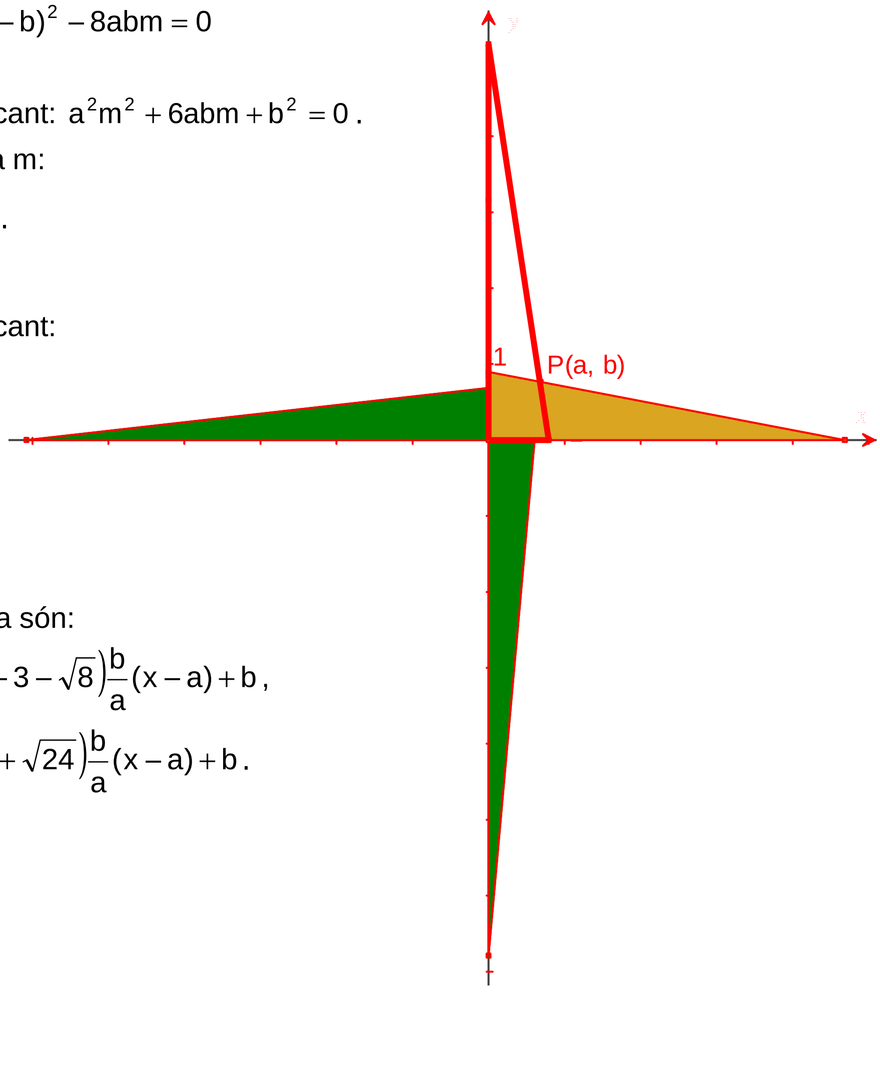
$$\left|\frac{ma-b}{m}(-ma+b)\right| = 8ab.$$

Elevant al quadrat:

$(am-b)^4-(8abm)^2=0$. $\left((am-b)^2+8abm\right)\left((am-b)^2-8abm\right)=0$.

Aleshores:

$(am-b)^2+8abm=0$, a bé, $(am-b)^2-8abm=0$



Si $(am-b)^2+8abm=0$. Simplificant: $a^2m^2+6abm+b^2=0$.

Resolent l'equació en la incògnita m:

$$m=\left(-3+\sqrt{8}\right)\frac{b}{a},\quad m=\left(-3-\sqrt{8}\right)\frac{b}{a}.$$

Si $(am-b)^2-8abm=0$. Simplificant:

$a^2m^2-10abm+b^2=0$.

Resolent l'equació en la incògnita m:

$$m=\left(5+\sqrt{24}\right)\frac{b}{a},\quad m=\left(5-\sqrt{24}\right)\frac{b}{a}$$

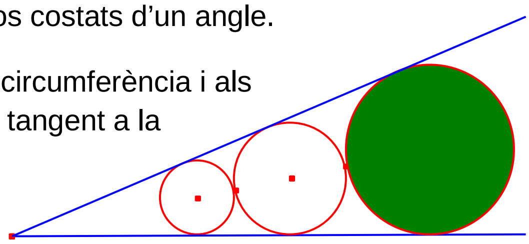
Els quatre pendents són distints.

Les rectes solucions del problema són:

$$y=\left(-3+\sqrt{8}\right)\frac{b}{a}(x-a)+b,\quad y=\left(-3-\sqrt{8}\right)\frac{b}{a}(x-a)+b,$$

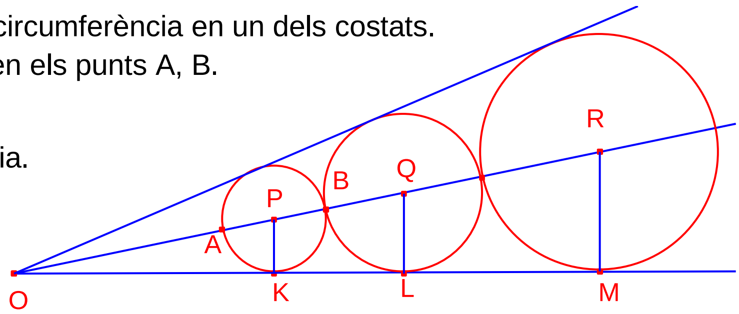
$$y=\left(5+\sqrt{24}\right)\frac{b}{a}(x-a)+b\ ,\quad y=\left(5+\sqrt{24}\right)\frac{b}{a}(x-a)+b.$$

1553.- Una circumferència de radi 2 és tangent als dos costats d'un angle.



Una circumferència de radi 3 és tangent a la primera circumferència i als dos costats de l'angle. Una tercera circumferència és tangent a la segona i als costats de l'angle.
Determineu el radi de la tercera circumferència.
Crux CC47.

Solució:
Siga O el vèrtex de l'angle i la bisectriu b de l'angle.
Siguen P, Q, R els centres de les tres circumferències.
Siguen K, L M punts de tangència de cada circumferència en un dels costats.
La bisectriu talla la primera circumferència en els punts A, B.



Siga $\overline{OP}=a$.
Siga $r=\overline{RM}$ radi de la tercera circumferència.
$\overline{PK}=2$.
$\overline{OQ}=a+5$, $\overline{QL}=3$.
$\overline{OR}=a+8+r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKP}$, $\overset{\Delta}{OLQ}$, $\overset{\Delta}{OMR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PK}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{QL}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{RM}}{\overline{OR}}.$$

$$\frac{2}{a}=\frac{3}{a+5}=\frac{r}{a+8+r}.$$

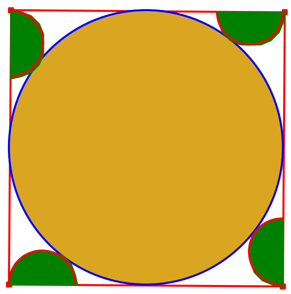
Resolent la primera equació, $\frac{2}{a}=\frac{3}{a+5}$, $a=10$.

$$\frac{2}{10}=\frac{r}{10+8+r}.$$

Resolent l'equació:

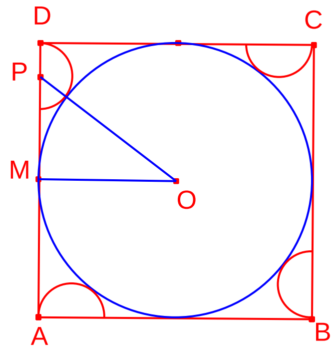
$$r=\frac{9}{2}.$$

1554.- Una circumferència està inscrita en un quadrat.



Quatre semicercles estan inscrits entre la circumferència i el quadrat de tal manera que són tangents a la circumferència i amb el diàmetre sobre els costats del quadrat i amb un vèrtex del quadrat d'extrem del diàmetre.
Determineu la raó entre l'àrea del cercle i la suma de les àrees dels quatre semicercles.
Crux CC15.

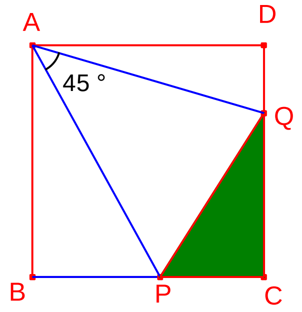
Solució:
Siga el quadrat ABCD de centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$



Siga $R=\overline{OM}$ el radi de la circumferència tangent al quadrat ABCD.
Siga $r=\overline{PD}$ radi dels semicercles.
$\overline{PM}=R-r$, $\overline{OP}=R+r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$(R+r)^2=(R-r)^2+R^2$.
Resolent l'equació:
$r=\frac{1}{4}R$.
L'àrea del cercle de radi R és:
$S_c=\pi R^2$.
L'àrea de la suma dels quatre semicercles de radi r és:
$S_{4s}=3\left(\pi r^2\right)$.
$$S_{4s}=3\left(\pi\left(\frac{1}{4}R\right)^2\right)=\frac{1}{8}\pi R^2 .$$
La proporció entre l'àrea del cercle i la suma de les àrees dels quatre semicercles és:
$$\frac{S_c}{S_{4s}}=\frac{\pi R^2}{\pi\frac{1}{8}R^2}=8 .$$

Ricard Peiró i Estruch

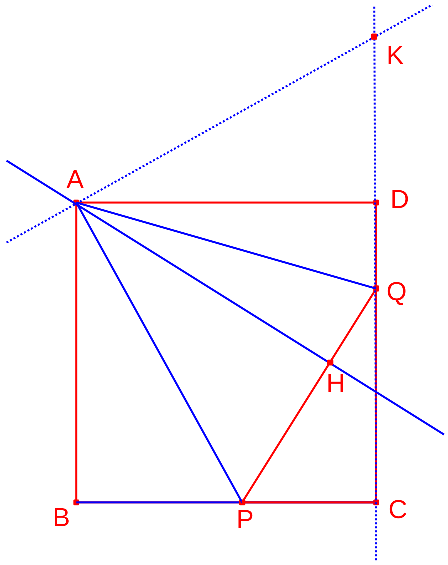


1555.- Siga el quadrat ABCD de costat 1.

Siguen P i Q dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\angle PAG = 45^o$.

Calculeu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$.

Calendari Al-Khwarizmi, juny 2015.



Solució:

Tacem la perpendicular al segment $\overline{AP}$ que passa per A que talla la recta CD en el punt K.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{ABK}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{AK}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{AQK}$ són iguals.

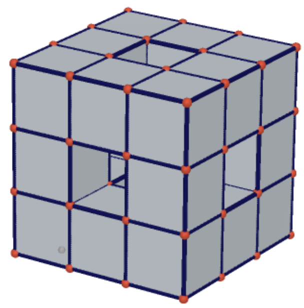
Siga $\overline{AH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.

Aleshores, $\overline{QH} = \overline{DQ}$, $\overline{PH} = \overline{DK} = \overline{PB}$.

Els perímetre del triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$ és:

$$P_{PCQ} = \overline{PC} + \overline{CQ} + \overline{PQ} = \overline{PC} + \overline{CQ} + \overline{PH} + \overline{QH} = \overline{PC} + \overline{CQ} + \overline{DQ} + \overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2.$$

1556.- Un cub $3\times3\times3$ té tres forats de secció un quadrat 1×1 que va des del centre de la cara cap al centre de cara oposada.



Quin és volum total del sòlid resultant?.
Quina és l'àrea total de del sòlid resultant?.

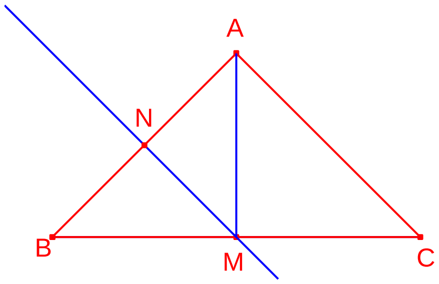
Solució:
En el cub inicial hem eliminat 7 cubs.
El volum és:
$V_{Sòlid} = 3^3 - 7 = 20$.
Cada cara del cub inicial hem eliminat un quadrat.
Formant-se en l'interior per dada aresta dos quadrats.
L'àrea és:
$S_{sòlid} = 6 \cdot 8 + 12 \cdot 2 = 72$.

1557.- En un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\sqrt{2}$, la mediatriu al costat $\overline{AB}$ passa pel punt mig del costat $\overline{BC}$. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

The alberta high school mathematics competition 1998.

Solució:

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, respectivament.



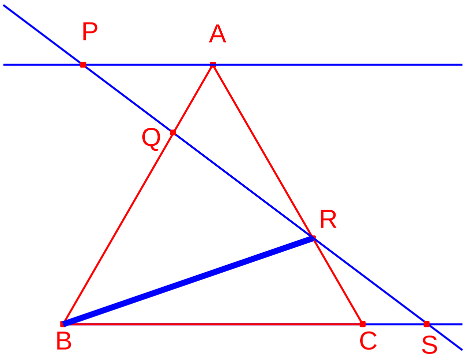
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BNM}$, $\overset{\Delta}{ANM}$ són iguals, aleshores: $\angle NBM = \angle NAM$.

En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMA}$ els angles aguts són iguals aleshores, $\angle NBM = \angle NAM = 45^o$.

Aleshores, $A = 90^o$. El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 100.$$

1558.- En el dibuix, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter de costat 3.



El segment $\overline{PA}$ és paral·lel al segment $\overline{BS}$.

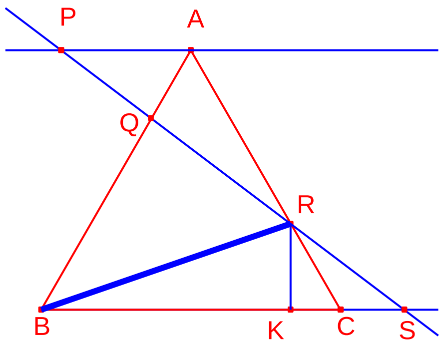
Si $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$, determineu la mesura dels segment $\overline{BR}$.

Solució:

$\angle PAR=\angle RCS=120^{\circ}$.

Per ser angles entre paral·leles, $\angle APR=\angle RSC$, $\overline{PR}=2\overline{RS}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{PAR}$, $\overset{\Delta}{SCR}$ són semblants i de raó 2:1.



Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AR}=2\overline{RC}$, $\overline{AC}=3$. Aleshores, $\overline{AR}=2, \overline{RC}=1$.

Siga K la projecció de R sobre el costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RKC}$:

$$\overline{RK}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \overline{KC}=\frac{1}{2}.$$

$$\overline{BK}=2-\overline{KC}=\frac{5}{2}.$$

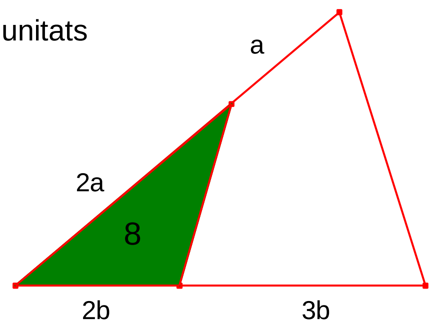
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKR}$:

$$\overline{BR}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}.$$

1559.- L'àrea del triangle menut ombrejat de la figura mesura 8 unitats quadrades.

Determineu l'àrea del triangle gran.

British Columbia Colleges jr. High School. Mathematics contest. 1998.



Solució:

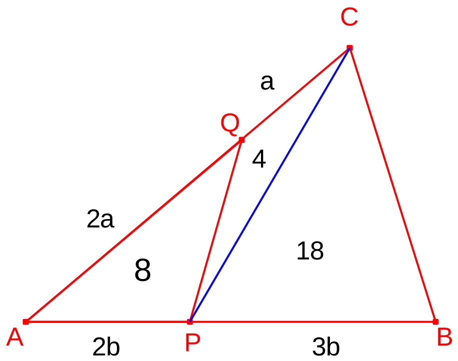
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{APC}$ tenen la mateixa altura:

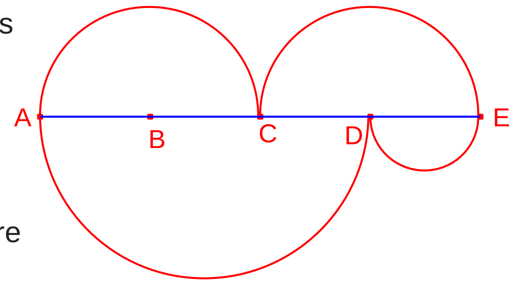
$$\frac{S_{APC}}{S_{APQ}} = \frac{3a}{2a}. \quad S_{APC} = \frac{3}{2} S_{APQ} = 12.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{APC}$ tenen la mateixa altura:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{5b}{2b}. \quad S_{ABC} = \frac{5}{2} S_{APC} = 30\ u^2.$$



1966.- El segment $\overline{AE}$ de la figura, es divideix en quatre parts iguals pels punts B, C i D.

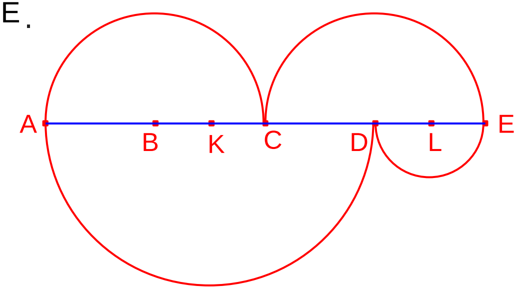


Es dibuixen els semicercles sobre els segments $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{AD}$ i $\overline{DE}$.

Determineu la raó entre les àrees de la zona tancada per sobre el segment $\overline{AE}$ i la zona tancada a sota del segment $\overline{AE}$.

Solució:

Siguen K, L els punts migs dels segments $\overline{AD}$ i $\overline{DE}$, respectivament.



Siga $\overline{LE} = r$ radi de la semicircumferència de diàmetre $\overline{DE}$.

$\overline{AC} = 2r$, $\overline{CE} = 2r$ radis de les semicircumferències superiors.

$\overline{AK} = 3r$ radi de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$.

L'àrea de la zona superior és:

$S_{sup} = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2$.

L'àrea de la zona inferior és:

$S_{inf} = \frac{1}{2}\pi(3r)^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = 5\pi r^2$.

La proporció entre les àrees és:

$\frac{S_{sup}}{S_{inf}} = \frac{4\pi r^2}{5\pi r^2} = \frac{4}{5}$.