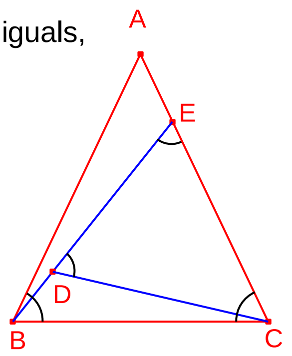
Problemes de Geometria per a l'ESO 157

1561.- En el dibuix, $\overline{BD}=2$, $\overline{BC}=8$ i els angles següents són iguals, $\angle ABC=\angle BCA=\angle CDE=\angle DEC$.

Determineu la mesura del segment $\overline{AB}$.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, $\overline{AB}=\overline{AC}$.

El triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és isòsceles, $\overline{BC}=\overline{BE}$, aleshores:

$\overline{DE}=\overline{BC}-\overline{BD}=8-2=6$.

Siga $\overline{AB}=\overline{AC}=b$, $\overline{CE}=\overline{CD}=x$.

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overset{\Delta}{CBE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{8}=\frac{6}{x}$. Resolent l'equació:

$x=4\sqrt{3}$.

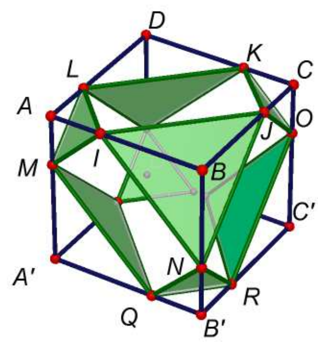
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BCE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{b}{8}=\frac{8}{x}=\frac{8}{4\sqrt{3}}$. Resolent l'equació:

$a=\frac{16}{3}\sqrt{3}$.

1562.- El cub de la figura té volum V. S'ha eliminat vuit piràmides AILM, BIJN,.... tal que totes les cares són triangles isòsceles.

Si $\overline{AI}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ quin és el volum del sòlid que resta.



Solució:

Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB}=3a$.

El volum del cub és:

$V=(3a)^3=27a^3$.

Hi ha dos tipus de piràmides:

4 piràmides tal que les arestes que conflueixen en un vèrtex tenen aresta a.

4 piràmides tal que les arestes que conflueixen en un vèrtex tenen aresta 2a.

El primer tipus de piràmides té volum:

$V_1=\frac{1}{3}\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{6}a^3$.

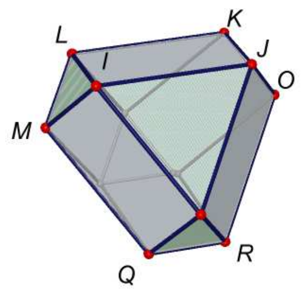
El segon tipus de piràmides té volum:

$V_1=\frac{1}{3}\frac{1}{2}(2a)^3=\frac{4}{3}a^3$.

El volum del sòlid resultant és:

$$S_{\text{sòlid}}=V-(4V_1+4V_2)=27a^3-\left(\frac{2}{3}a^3+\frac{16}{3}a^3\right)=21a^3.$$

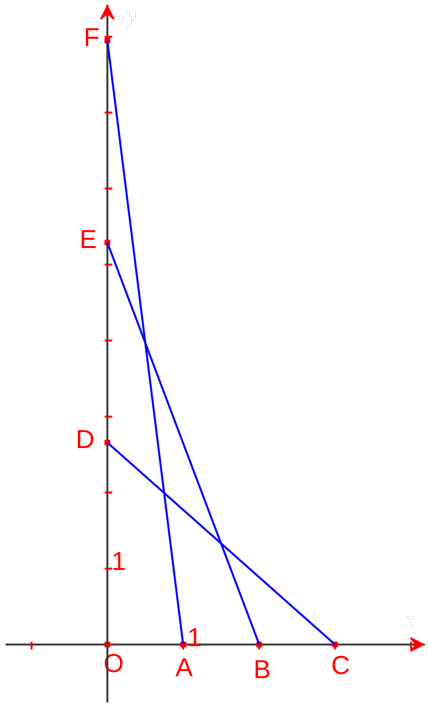
$$S_{\text{sòlid}}=21a^3=21a^3\frac{V}{27a^3}=\frac{7}{9}V.$$



1563.- Siga O l'origen de coordenades del plànol.

Siguen A, B, C punts de l'eix OX tal que $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=1$.
Siguen D, E, F punts de l'eix OY tal que $\overline{OD}=\overline{DE}=\overline{EF}\geq 1$.
Si $\overline{CD}\cdot\overline{AF}=\overline{BE}^2$, calculeu la mesura de $\overline{OD}$.

Solució:
Siga $\overline{OD}=x\geq 1$



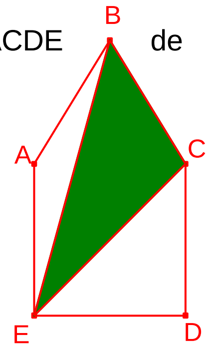
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAF}$:
$\overline{AF}=\sqrt{1+(3x)^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCD}$:
$\overline{CD}=\sqrt{3^2+x^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBE}$:
$\overline{BE}^2=2^2+(2x)^2$.

$\overline{CD}\cdot\overline{AF}=\overline{BE}^2$, aleshores:
$\sqrt{1+9x^2}\sqrt{9+x^2}=4x^2+4$. Elevant al quadrat:
$(1+9x^2)(9+x^2)=16(x^2+1)^2$. Simplificant:
$7x^4-50x^2+7=0$. Resolent l'equació:
$x=\sqrt{7}$.

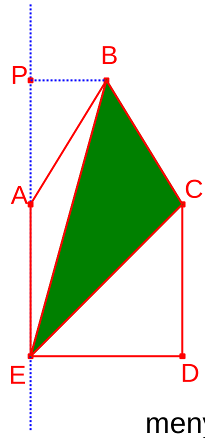
1564.- En la figura, el pentàgon ABCDE està format per un quadrat ACDE de costat 8 i un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=\overline{BC}$.



Si l'àrea del pentàgon és 90, determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEC}$.

Solució:

Siga P la projecció de B sobre la recta AE.



$\overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot 8=4$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$S_{ABE}=\frac{1}{2}\overline{AE}\cdot\overline{PB}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4=16$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$S_{CDE}=\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$.

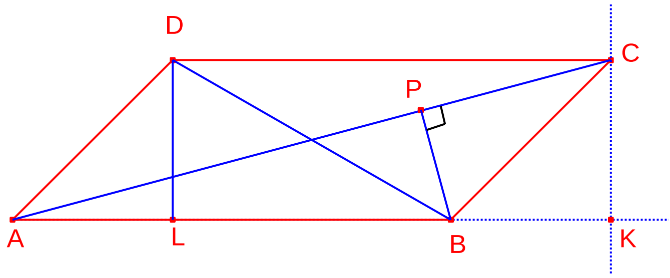
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEC}$ és igual a l'àrea del pentàgon ABCDE menys la suma de les àrees del triangles $\overset{\Delta}{ABE}$ i $\overset{\Delta}{CDE}$:

$S_{BEC}=S_{ABCDE}-\left(S_{ABE}+S_{CDE}\right)=90-(16+32)=42$.

1565.- Siga el paral·lelogram ABCD tal que $\angle BAD = 45^{o}$ i $\angle ABD = 30^{o}$.

Proveu que la distància de B a la diagonal $\overline{AC}$ és $\frac{1}{2}\overline{AD}$.

Solució:



Siga $\overline{AD} = c$.

Siga P la projecció de B sobre la diagonal $\overline{AC}$.

Siga K la projecció de C sobre la recta AB.

Siga L la projecció de D sobre la recta AB.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALD}$ és isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{AL} = \overline{DL} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DLB}$ (30º, 60º, 90º):

$$\overline{BD} = 2\overline{DL} = c\sqrt{2}, \ \overline{LB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BD} = c\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)c, \ \overline{AK} = 2\overline{AL} + \overline{LB} = \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)c.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{DL} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}c = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)c^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKC}$:

$$\overline{AC}^2 = \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 c^2 = 2\left(2+\sqrt{3}\right)c^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BP} = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)c^2.$$

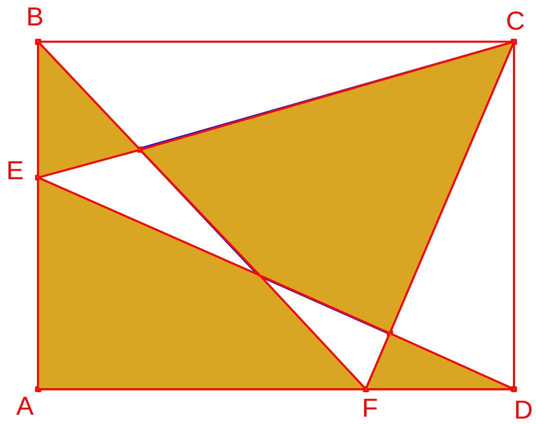
$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2\cdot\overline{BP}^2 = \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{3}\right)^2 c^4.$$

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{4}2\left(2+\sqrt{3}\right)c^2\cdot\overline{BP}^2 = \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{3}\right)^2 c^4.$$ Simplificant:

$$\overline{BP}^2 = \frac{1}{8}\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}}c^2 = \frac{1}{8}\frac{4+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}c^2 = \frac{1}{4}c^2.$$

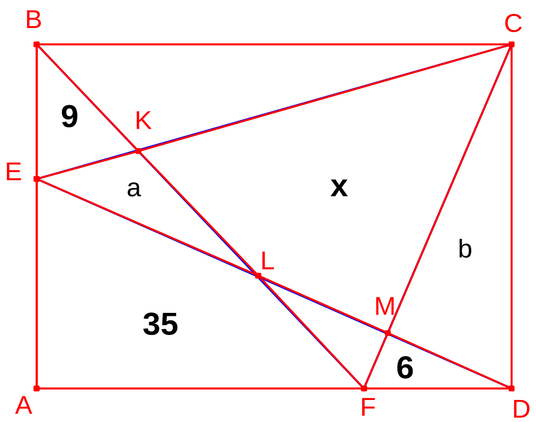
Aleshores, $\overline{BP} = \frac{1}{2}c$.

1566.- Els segments $\overline{DE}$, $\overline{CE}$, $\overline{BF}$ i $\overline{CF}$ divideixen el rectangle ABCD en un cert nombre de regions mes menudes. En la figura de la dreta, són ombrejats dos triangles i dos quadrilàters d'àrees 9, 35, 6 i x.



Determineu el valor de x.

Solució:



Siga $S_{EKL} = a$, $S_{CDM} = b$.

Siga $S_{ABCD} = S$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és igual a la meitat de l'àrea del rectangle ABCD.

$$a + b + x = \frac{1}{2}S.$$

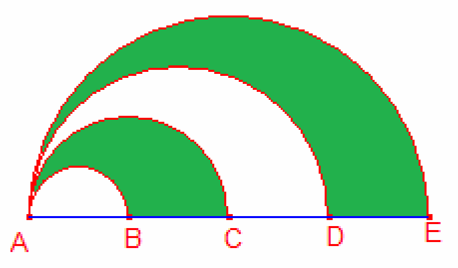
La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABF}$ i $\overset{\Delta}{CDF}$ és igual a la meitat del rectangle ABCD:

$$9 + 35 + 6 + a + b = \frac{1}{2}S.$$

Aleshores, $9 + 35 + 6 + a + b = a + b + x$. Simplificant:

$x = 50$.

1567.- En la figura, quatre semicercles estan dibuixats amb $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ com diàmetres.



El segment $\overline{AE}$ està dividit en quatre parts iguals pels punts B, C, D.
Determineu la raó entre les àrees de la part acolorida i la part blanca.

Solució:
Siga $\overline{AB} = 2r$ diàmetre del semicercle menut.
$\overline{AC} = 4r$, $\overline{AD} = 6r$, $\overline{AE} = 8r$.
L'àrea de la regió acolorida és:

$$S_{color} = \frac{1}{2}\pi(4r)^2 - \frac{1}{2}\pi(3r)^2 + \frac{1}{2}\pi(2r)^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 5\pi r^2.$$

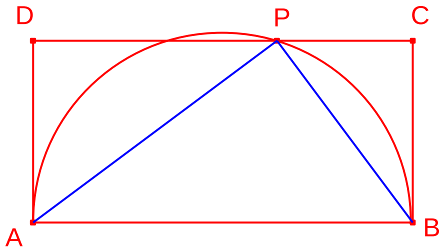
L'àrea de la regió no acolorida és:

$$S_{blanca} = \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi(3r)^2 - \frac{1}{2}\pi(2r)^2 = \frac{5}{2}\pi r^2.$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{color}}{S_{blanca}} = \frac{5\pi r^2}{\frac{5}{2}\pi r^2} = 2.$$

1568.- En la figura, ABCD és un rectangle amb $\overline{AB} = 5$ i el semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ talla $\overline{CD}$ en dos punts. Si la distància d'un d'aquests punts al vèrtex A és 4, determineu l'àrea del rectangle ABCD.



Solució:

Siga $\overline{AP} = 4$ (dels dos punts el més allunyat del vèrtex A).

$\angle APB = 90^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$\overline{BP} = 3$.

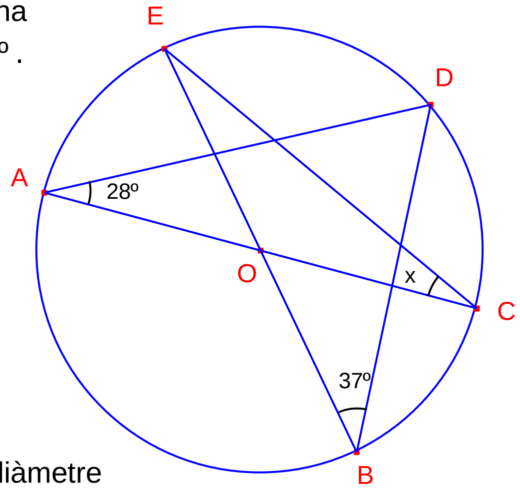
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$ és:

$$S_{APB} = \frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 6.$$

L'àrea del rectangle ABCD és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$.

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{APB} = 2 \cdot 6 = 12.$$

1569.- Dos angles d'una estrella de 5 puntes inscrita en una circumferència de centre O són $\angle CAD = 28^o$, $\angle EBD = 37^o$.



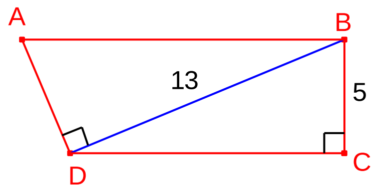
Determineu la mesura de l'angle $x = \angle ACE$.

Solució:
Per ser un angle inscrit en la circumferència i abraçar un diàmetre
$\angle AEC = 90^o$.
$\angle EAC = 90^o - x$.
$\angle EAD = 90^o - x - 28^o = 62^o - x$.
Els angles $\angle EAD$, $\angle EBD$ són iguals ja que són inscrits i abracen el mateix arc:
$62^o - x = 37^o$. Resolent l'equació:
$x = 25^o$.

1570.- En un trapezi ABCD, l'angle B és recte.

La diagonal $\overline{BD}$ és perpendicular al costat $\overline{AD}$.
Si $\overline{BC}=5$ i la diagonal $\overline{BD}=13$, calculeu l'àrea del trapezi ABCD.

Solució



El trapezi és rectangle en B.
Si B és recte i $\overline{BD}$ és perpendicular al costat $\overline{AD}$, $C=90^{o}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{CD}=12$

$\angle BDC=\angle ABD$, aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{BDA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{AB}}{13}=\frac{13}{12}$. Resolent l'equació:
$\overline{AB}=\frac{169}{12}$.
L'àrea del trapezi ABCD és:
$$S_{ABCD}=\frac{12+\frac{169}{12}}{2}5=\frac{1565}{24}.$$