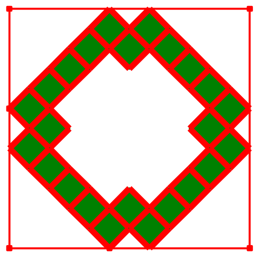
Problemes de Geometria per a l'ESO 158

1571.- En el dibuix hi ha ombrejada una regió interior a un quadrat gran.
La regió ombrejada està dividida en quadrats menuts iguals.
Determineu la raó entre les àrees de la regió ombrejada i el quadrat gran.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. 2015.



Solució:

Sense perdre generalitat siga $\overline{KL} = \overline{MJ} = 1$ costats dels quadrats menuts.

$\overline{KM} = 5$.

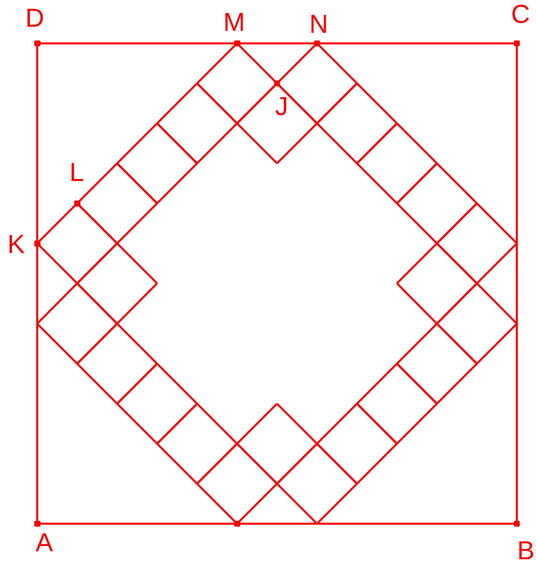
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KDM}$:

$\overline{DM} = \frac{\sqrt{2}}{2}5$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{MJN}$:

$\overline{MJ} = \sqrt{2}$.

$\overline{CD} = 2\overline{DM} + \overline{MN} = 2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.



L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$.

L'àrea ombrejada consta de 24 quadrats de costat 1. La seua àrea és:

$S_{ombrejada} = 24$.

La proporció entre l'àrea ombrejada i la del quadrat gran és:

$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$.

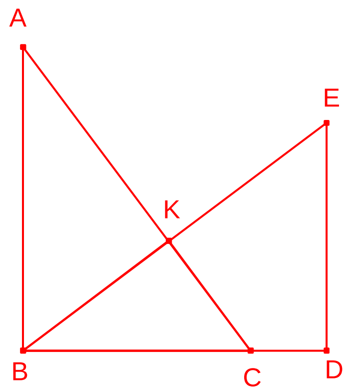
1572.- El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^o$ tal que els catets mesuren 15 i 20 és igual al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDE}$, $D = 90^o$.

El punt C està situat, estrictament, a l'interior del segment $\overline{BD}$, i els punts A i E estan situats al mateix costat de la recta BD.

a) Determineu la distància entre els punts A i E.

b) Calculeu l'àrea de la intersecció dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BDE}$.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = 25$.

Siga K la intersecció de les hipotenuses $\overline{AC}$, $\overline{BE}$.

$\angle BAC = \angle EBD$.

Aleshores, $\angle ABK = 90^o - \angle BAC$.

Per tant, $\angle BKA = 90^o$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BKC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BK} = 12$, $\overline{CK} = 9$.

Aleshores, $\overline{AK} = 16$, $\overline{KE} = 13$.

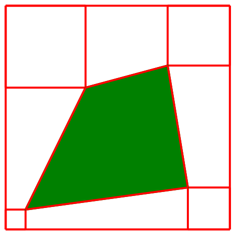
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKE}$:

$\overline{AE} = \sqrt{16^2 + 13^2} = 5\sqrt{17}$.

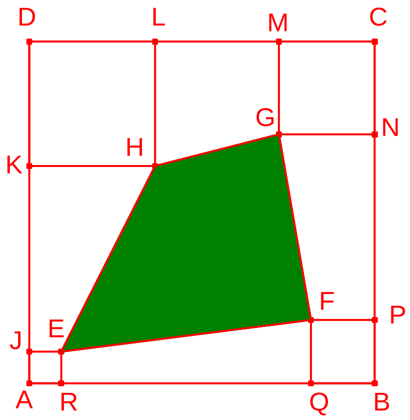
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BKC}$ intersecció dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BDE}$ és:

$$S_{BKC} = \frac{1}{2}\overline{BK}\cdot\overline{CK} = \frac{1}{2}12\cdot 9 = 54.$$

1573.- La figura està formada per quatre quadrats menuts en els vèrtexs d'un quadrat gran.
Si les àrees dels quadrats menuts tenen longituds 1 cm, 2 cm, 3 cm i 4 cm en sentit contrari a les busques d'un rellotge i el costat exterior gran el seu costat mesura 11 cm.
Calculeu l'àrea de la regió quadrangular ombrejada.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. 2015.



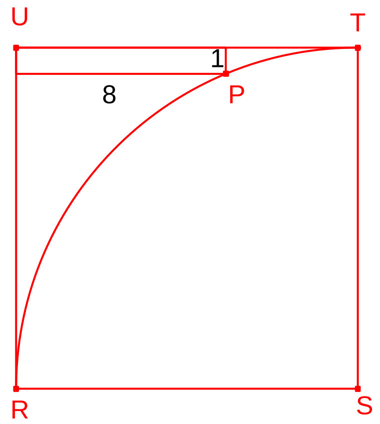
Solució:



Siga $\overline{AB} = 11$ costat del quadrat ABCD.
$\overline{AJ} = \overline{AR} = 1$, $\overline{BQ} = \overline{BP} = 2$, $\overline{CM} = \overline{CN} = 3$, $\overline{DK} = \overline{DL} = 4$.
$\overline{JK} = 6$, $\overline{LM} = 4$, $\overline{NP} = 6$, $\overline{QR} = 8$.
L'àrea del quadrilàter EFGH és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels quatre quadrats de costats 1, 2, 3, 4 i dels trapezis rectangles JKME, RQFE, PNGF, MLHG:

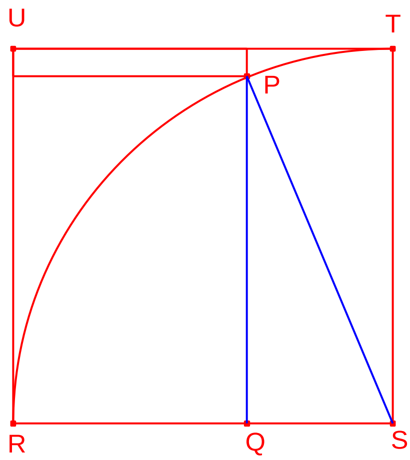
$$S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{AREJ} + S_{QBPF} + S_{GNCM} + S_{KHLD} + S_{JKME} + S_{RQFE} + S_{PNGE} + S_{MLHG}).$$

$$S_{EFGH} = 11^2 - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \frac{4+1}{2}6 + \frac{1+2}{2}8 + \frac{2+3}{2}6 + \frac{4+3}{2}4\right) = 35\ \text{cm}^2.$$



1574.- En el quadrat RSTU s'ha dibuixat un quadrant de centre S que passa per T i R.
El punt P és un punt de l'arc que està a una distància 1 del costat $\overline{TU}$ i a 8 unitats del costat $\overline{RU}$.
Calculeu la longitud del costat RSTU.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. 2015.

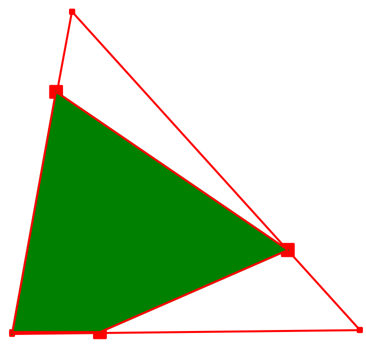
Solució:



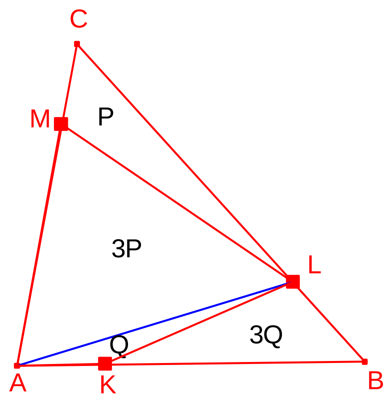
Siga $\overline{RS} = c$ costat del quadrat RSTU.
Siga Q la projecció de P sobre el costat $\overline{RS}$.
$\overline{PS} = c$, $\overline{QS} = c - 8$, $\overline{PQ} = c - 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQS}$:
$c^2 = (c-1)^2 + (c-8)^2$. Simplificant:
$c^2 - 18c + 65 = 0$. Resolent l'equació:
$c = 13$.

1575.- Tres punts estan situats en els costats d'un triangle i divideixen cada costat en proporció 1:3 (veure figura).
Determineu la raó entre les àrees de la zona ombrejada i del triangle.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. 2015.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

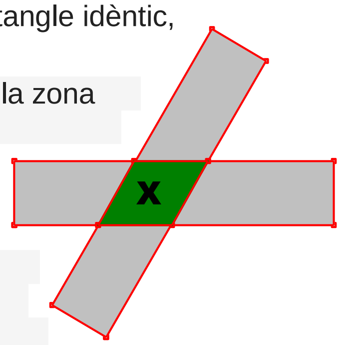


Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el quadrilàter AKLM.
Siga $S_{CML}=P$, $S_{AKL}=Q$.
Aleshores, $S_{AML}=3\cdot P$, $S_{BAKL}=3\cdot Q$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_{ABC}=4(P+Q)$.
L'àrea del quadrilàter AKLM:
$S_{AKLM}=3\cdot P+Q$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BLA}$, $\overset{\Delta}{CLA}$ tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases:
$\dfrac{S_{BLA}}{S_{CLA}}=\dfrac{1}{3}$.
$\dfrac{4\cdot Q}{4\cdot P}=\dfrac{1}{3}$. Aleshores, $P=3\cdot Q$.

La proporció entre les àrees del quadrilàter AKLM i el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$\frac{S_{AKLM}}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot P+Q}{4(P+Q)}=\frac{10\cdot Q}{16\cdot Q}=\frac{5}{8}.$$

1576.- Un rectangle es col·loca obliquament a la part superior d'un rectangle idèntic, com es mostra a la figura.



L'àrea de la regió de solapament X (ombrejat més fosc) és un vuitè de la zona ombrejada total.
Quina fracció de l'àrea d'un rectangle és X?.
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. 2015.

Solució:
Siga R l'àrea d'un rectangle.
L'àrea de la regió ombrejada total és:
$2R - X$.
L'àrea de la regió de solapament X és un vuitè de la zona ombrejada total.

$$\frac{X}{2R - X} = \frac{1}{8}.$$

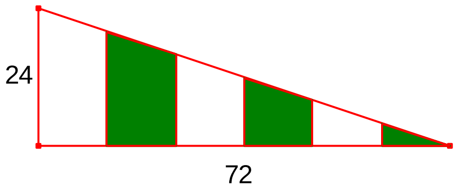
Simplificant:

$$8X = 2R - X.$$

$$9X = 2R.$$

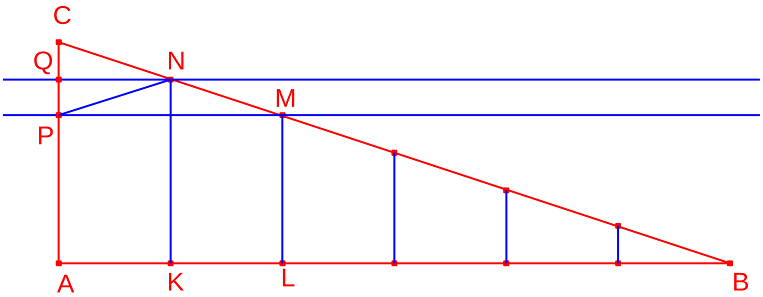
$$\frac{X}{R} = \frac{2}{9}.$$

1577.- Una bandera té la forma d'un triangle rectangle, com es mostra el la figura, amb els costats horitzontals i verticals sent la longitud de 72 cm i 24 cm, respectivament.



La bandera es divideix en 6 franges verticals d'igual amplària.
Determineu la diferència entre les àrees de dues franges adjacents
UKMT Intermediate Mathematical Challenge. 2015.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{AB} = 72$, $\overline{AC} = 24$.
Siga AKNC la primera franja.
Siga KLMN la segona franja.

$$\overline{AK} = \overline{KL} = \frac{1}{6}\overline{AB} = 12.$$

Siga P la projecció de M sobre el catet $\overline{AC}$.
Siga Q la projecció de N sobre el catet $\overline{AC}$.
Els trapezis AKNP, LKNM són iguals.
La diferència d'àrees entre la primera franja i la segona és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CPN}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{QNC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{QN}}{\overline{AB}}.$$

$$\frac{\overline{QC}}{24} = \frac{12}{72}.$$ Resolent l'equació:

$$\overline{QC} = 4.$$

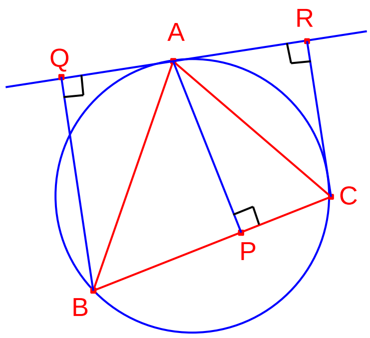
$$\overline{PC} = 2 \cdot \overline{QC} = 8.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CPN}$ és:

$$S_{CPN} = \frac{1}{2}\overline{PC} \cdot \overline{QN} = \frac{1}{2} 8 \cdot 12 = 48\text{cm}^2.$$

Les altres diferències de les àrees de les bandes donaria el mateix triangle $\overset{\Delta}{CPN}$.

1578.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ està inscrit en una circumferència.
La recta QAR és tangent a la circumferència.
Els angles $\angle BQA = \angle ARC = \angle APC = 90º$.
Proveu que $\overline{BQ} \cdot \overline{CR} = \overline{AP}^2$.
Olympiad Maclaurin, 2014.



Solució:
Els angles $\angle QAB$, $\angle ACB$ són iguals ja que són semiinscrits i inscrits a la circumferència i abracen el mateix arc.

Aleshores, Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQB}$, $\overset{\Delta}{CPA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} \qquad (1)$$

Els angles $\angle RAC$, $\angle ABC$ són iguals ja que són semiinscrits i inscrits a la circumferència i abracen el mateix arc.

Aleshores, Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ARC}$, $\overset{\Delta}{BPA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CR}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \qquad (2)$$

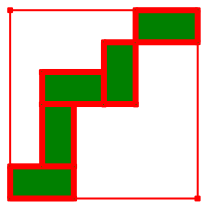
Multiplicant les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{BQ} \cdot \overline{CR}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} \qquad (3)$$

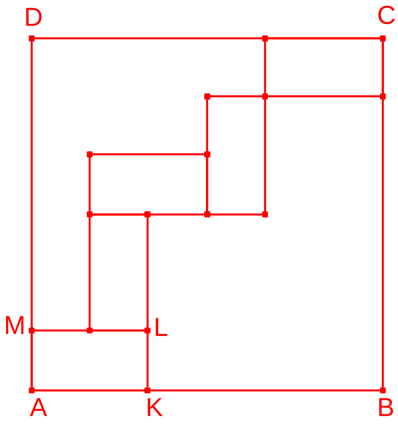
Simplificant:

$\overline{BQ} \cdot \overline{CR} = \overline{AP}^2$.

1579.- Cinc rectangles iguals estan disposats en un quadrat de costat 24cm, com mostra la figura.
Calculeu l'àrea de cadascun dels rectangles.
European "Kangaroo" Mathematical Challenge Grey, 2014



Solució:



Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=24$.

Siga $\overline{AK}=x$, $\overline{AM}=y$ les dimensions del rectangle AKLM.

$\overline{AB}=3x=24$.

$\overline{AD}=2x+2y=24$.

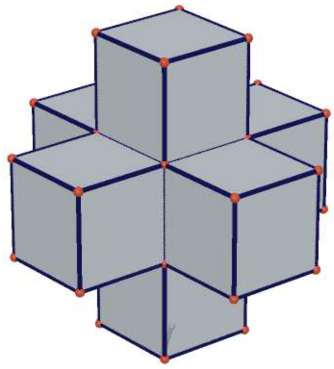
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$\begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$.

L'àrea del rectangle AKLM és:

$S_{AKLM}=xy=8\cdot 4=32cm^2$.

1580.- Carles va construir la forma mostrada utilitzant cubs d’aresta 1.
Quants cubs s’han d'afegir per fer un cub amb arestes de longitud 3?.



Solució:
La figura mostrada consta de 7 unitats cúbiques.
Un cub d’aresta 3 té 27 unitats cúbiques.
A Carles li calen $27-7=20$ cubs d’aresta 1.