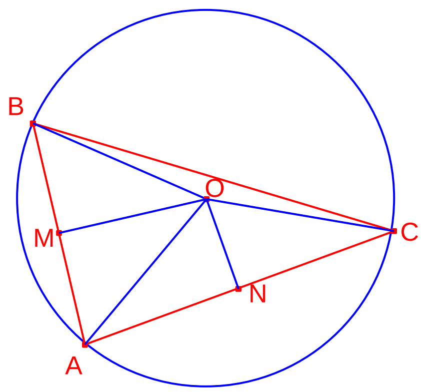
Problemes de Geometria per a l'ESO 159

1581.- Una circumferència de radi 10 i centre el punt O té inscrit el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Si $\overline{AB}=12$ i $B=60^{o}$, determineu la distància del centre O al costat $\overline{AB}$ i la mesura del costat $\overline{AC}$

KöMaL, K460. Març 2015.

Solució:



$\overline{OA}=10$. Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

La distància de O al costat $\overline{AB}$ és igual a la distància de O a M ja que el triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$

$d(O,\overline{AB})=\overline{OM}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AC}$.

Els triangle $\overset{\Delta}{ANO}$ és rectangle ja que el triangle $\overset{\Delta}{AOC}$ és isòsceles.

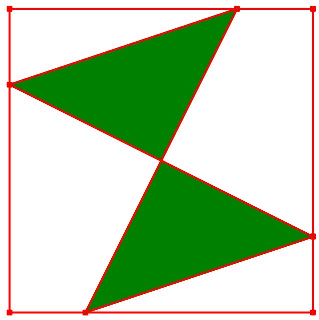
Per ser $\angle AOC$ angle central i $\angle ABC$ inscrit i abraçar tots dos el mateix arc:

$\angle AOC=2B=120^{o}$.

$\angle AON=\frac{1}{2}\angle AOC=60^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANO}$:

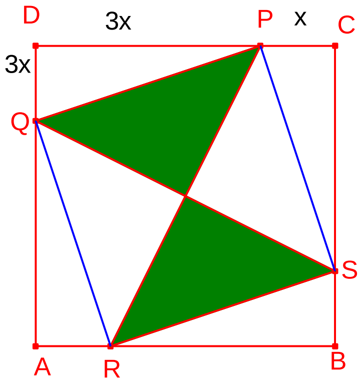
$\overline{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OA}=5\sqrt{3}$. Aleshores, $\overline{AC}=2\cdot\overline{AN}=10\sqrt{3}$.



1582.- El quadrat de la figura té àrea 80. En cada costat hem marcat un punt que divideix el costat de manera que un dels segments en què queda dividit el costat té longitud triple que l'altre. Quina és l'àrea total de la zona acolorida?

Proves Cangur 2015. Nivell 3.

Solució:



Siga El quadrat ABCD d'àrea 80.

Siga PQRS el quadrilàter creuat tal que $\overline{CP}=\overline{BS}=\overline{AR}=\overline{DQ}=x$,

$\overline{DP}=\overline{CS}=\overline{BR}=\overline{AQ}=3x$.

$S_{ABCD}=(4x)^2=80$. Simplificant:

$x^2=5$.

El quadrilàter convex PQRS és un quadrat.

L'àrea de la regió ombrejada és igual a la meitat de l'àrea del quadrat de costat $\overline{PQ}$.

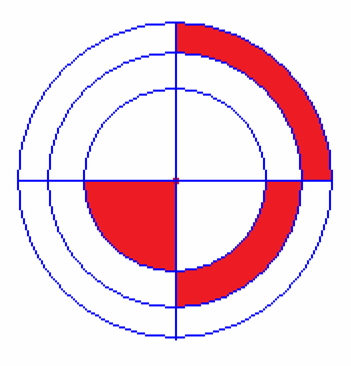
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PDQ}$:

$\overline{PQ}^2=(3x)^2+x^2=10x^2$.

L'àrea de la regió ombrejada és:

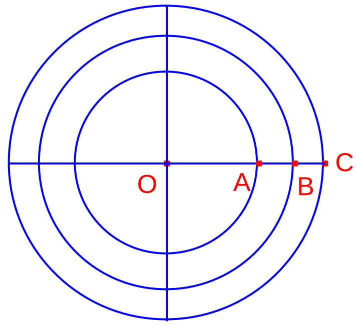
$$S_{ombrejada}=\frac{1}{2}\overline{PQ}^2=\frac{1}{2}10x^2=25.$$

1583.- En la figura hi ha tres cercles concèntrics i dos diàmetres perpendiculars. El radi de la circumferència petita és 1 i les tres regions ombrejades tenen totes tres la mateixa àrea. Quin és el producte dels tres radis?



Proves Cangur 2015. Nivell 4.

Solució:



Siga O el centre de les tres circumferències concèntriques.

Siguen $r_1 = \overline{OA} = 1$, $r_2 = \overline{OB}$, $r_3 = \overline{OC}$ els tres radis.

Les tres regions ombrejades tenen la mateixa àrea:

$$\frac{1}{4}\pi r_1^2 = \frac{1}{4}\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) = \frac{1}{4}\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right).$$

Simplificant:

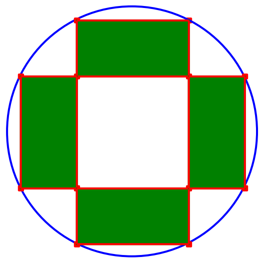
$$1 = r_2^2 - 1 = r_3^2 - r_2^2.$$

Resolent el sistema:

$$r_2^2 = 2,\ r_3^2 = 3.$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

1584.- Els quatre rectangles ombrejats en la figura, són iguals i amb un costat el doble que l'altre.

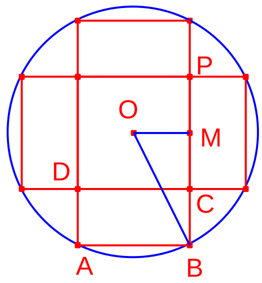


Si la circumferència té radi 10, determineu l'àrea de cadascun dels rectangles.
1ª Copa Cangur de la SCM. 2014.

Solució:

Siga ABCD el rectangle inferior, $\overline{AD} = x$, $\overline{AB} = 2x$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{CP}$.



$\overline{OM} = x$, $\overline{BM} = 2x$, $\overline{OB} = 10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$x^2 + (2x)^2 = 10^2$.

$5x^2 = 100$.

Simplificant:

$x^2 = 20$.

L'àrea del rectangle ABCD és:

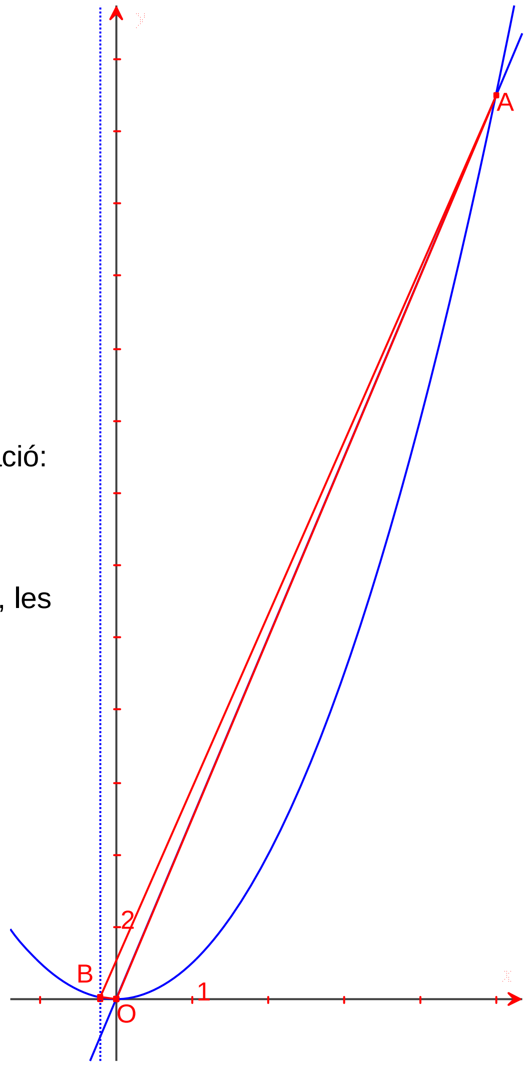
$S_{ABCD} = 2x \cdot x = 2x^2 = 2 \cdot 20 = 40$.

1585.- En el plànol cartesià d'origen O considerem la recta $y=5x$ i la paràbola $y=x^2$ que s'intersecten en el punt A.

La perpendicular a la recta OA que passa per O talla la paràbola en el punt B.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$.

Crux, CC108. Febrer 2015.



Solució:

Resolent el sistema format per la recta i la paràbola, les coordenades del punt A són:

$$\begin{cases} y=5x \\ y=x^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=5 \\ x=25 \end{cases}. \quad A(5, 25).$$

$$\overline{OA}=\sqrt{5^2+25^2}=5\sqrt{26}.$$

La recta perpendicular a la recta OA que passa per O té equació:

$$y=-\frac{1}{5}x.$$

Resolent el sistema format per la recta $y=-\frac{1}{5}x$ i la paràbola, les coordenades del punt B són:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{5}x \\ y=x^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{5} \\ x=\frac{1}{25} \end{cases}. \quad A(5, 25).$$

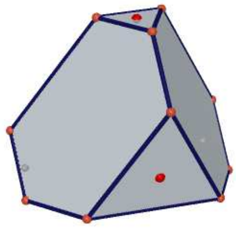
$$\overline{OB}=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{25}\right)^2}=\frac{1}{25}\sqrt{26}.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}5\sqrt{26}\,\frac{1}{25}\sqrt{26}=\frac{13}{5}.$$

Nota: En dibuix l'escala dels eixos de coordenades no és 1:1.

1586.- Cadascun dels vèrtexs d'un tetraedre regular d'aresta 3, s'ha tallat una piràmide tal que la secció formada és un triangle equilàter. Les quatre piràmides obtingudes tenen dimensions distintes.



Calculeu la longitud total del total de les arestes del sòlid truncat.
Crux Mathematicorum, CC106. Febrer 2015.

Solució.
Les piràmides tallades són tetraedres regulars d'arestes a, b, c, d.

El tetraedre truncat format té 18 arestes:
Tres de longitud a, tres de longitud b, tres de longitud c, tres de longitud d, i sis de longituds, $3-(a+b)$, $3-(a+c)$, $3-(a+d)$, $3-(b+c)$, $3-(b+d)$, $3-(c+d)$, respectivament.

La suma de la longitud de les arestes és:
$$S_{st}=3a+3b+3c+3d+3-(a+b)+3-(a+c)+3-(a+d)+3-(b+c)+3-(b+d)+3-(c+d)=12$$
És a dir, suma de la longitud de totes les arestes és igual a la suma de les arestes del tetraedre inicial.

1587.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B=90º$, $\overline{BC}=1$.

Siga D un punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AD}=\overline{AB}=\frac{1}{2}$.

Determineu la longitud del segment $\overline{DC}$.

Crux Mathematicorum. CC107. Febrer 2015.

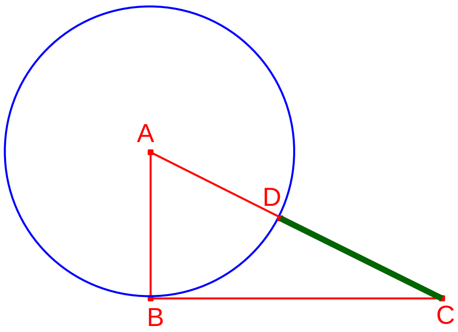
Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

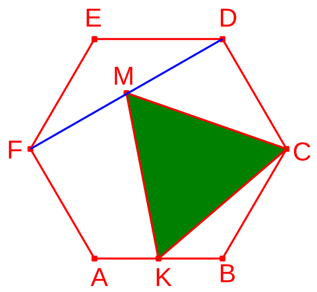
$$\overline{AC}^2=1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

$$\overline{AC}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\Phi}.$$



1588.- Siga l'hexàgon regular ABCDEF.



Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{DF}$.

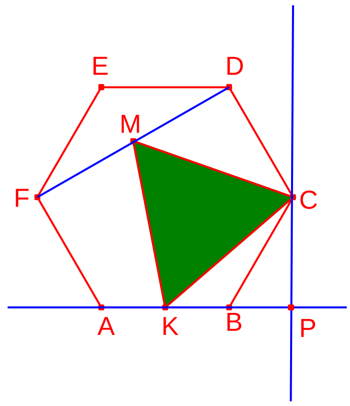
Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{KCM}$ és equilàter.

Solució:

$\angle CDM = 90^o$

Siga P la projecció de C sobre la recta AB.



$\angle BCP = 30^o$.

$\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{DM}$.

$\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

$\overline{KP} = \overline{CB} = \overline{CD}$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDM}$, $\overset{\Delta}{KPC}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CK} = \overline{CM}$.

Siga $\alpha = \angle CKP = \angle MCD$.

$\angle BCD = 120^o$.

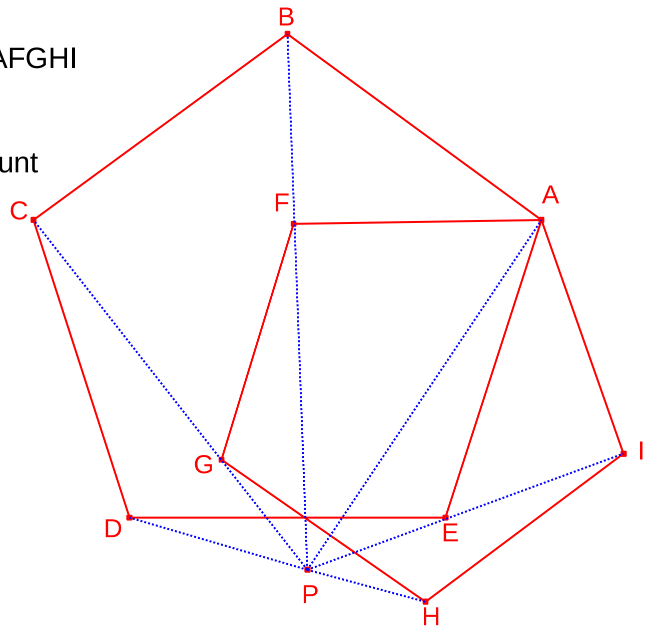
$\angle KCB = 90^o - \alpha - 30^o = 60^o - \alpha$.

$\angle KCM = \angle BCD - (\angle MCD + \angle KCB) = 120^o - (\alpha + 60^o - \alpha) = 60^o$.

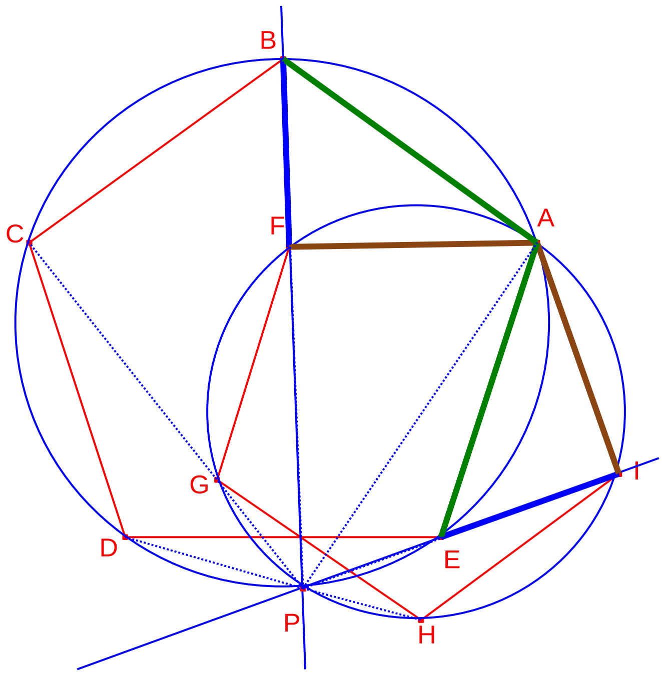
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{KCM}$ és equilàter.

1589.- Siguen els pentàgons regulars ABCDE, AFGHI qualssevol que tenen el vèrtex A en comú.

Les rectes BF, CG, DH, EI s'intersecten en un punt P i formen i a més a més,
$\angle APB = \angle BPC = \angle DPD = \angle API = \angle IPH$.



Solució:



Siga P la intersecció de les rectes BF i EI.

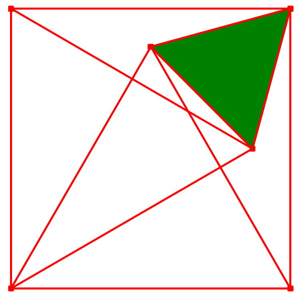
Els triangles $\overset{\Delta}{AFB}$, $\overset{\Delta}{AIE}$ són iguals ja que $\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{AF} = \overline{AI}$, $\angle BAE = \angle FAI = 108^o$.

Aleshores, el triangles $\overset{\Delta}{AIE}$ és el transformat del triangle $\overset{\Delta}{AFB}$ mitjançant un gir de centre A i 108º.
La recta BF és transforma en la recta EI mitjançant un gir de centre A i 108º.

Aleshores, $\angle BPI = 72^o$.
$\angle BPE = 72^o, \angle BAE = 108^o$, aleshores, P pertany a la circumferència circumscrita al pentàgon ABCDE.
$\angle FPI = 72^o, \angle FAI = 108^o$, aleshores, P pertany a la circumferència circumscrita al pentàgon regular AFGHI.
$\angle IPH = 36^o$, $\angle IPA = 36^o$, $\angle APB = 36^o$, $\angle BPC = \angle FPG = 36^o$.
Aleshores, C, G, P estan alineats.
$\angle CPD = 36^o$.
$\angle DPE = 144^o$.
Aleshores, D, P, H estan alineats.

1590.- En la figura, sobre dos costats d'un quadrat s'han dibuixat dos triangles equilàters.

Proveu que el triangle ombrejat és equilàter.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

$\overline{DK} = \overline{AB} = c$, $\angle CDK = 30^\circ$.

$\overline{BL} = \overline{AB} = c$, $\angle LBC = 30^\circ$.

$\overline{AL} = \overline{AK} = c$, $\angle KAL = 30^\circ$.

Els triangles isòsceles $L\overset{\Delta}{B}C$, $C\overset{\Delta}{D}K$, $K\overset{\Delta}{A}L$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CK} = \overline{CL} = \overline{KL}$.