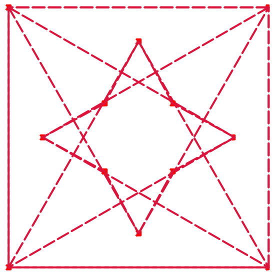
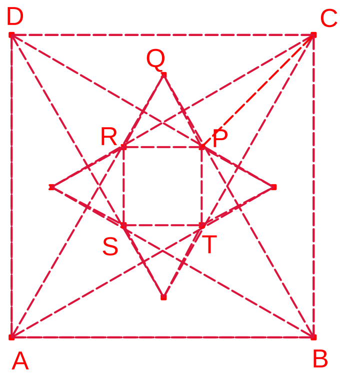
Problemes de Geometria per a l'ESO 16

151.- Donat un quadrat de costat a, sobre els seus costats i cap a l'interior del quadrat es construeixen 4 triangles equilàters que determinen un estel de 4 puntes.
Calculeu l'àrea de l'estel.
Olabarrieta, pàgina 161. Problema 17.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat a.
Notem que l'estel està format per 4 triangles equilàters i un quadrat, tots cinc d'igual costat.



Siga $x=\overline{BP}$, $\angle PBC=30^o$, $\angle PCB=45^o$.
Aleshores, $\angle CPB=105^o=60^o+45^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$:

$$\frac{a}{\sin 105^o}=\frac{x}{\sin 45^o}.$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$ Simplificant:

$$x=\left(\sqrt{3}-1\right)a.$$

$$\overline{PQ}=\overline{BQ}-\overline{BP}=a-\left(\sqrt{3}-1\right)a=\left(2-\sqrt{3}\right)a.$$

L'àrea de l'estel és igual a 4 vegades l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ més l'àrea del quadrat PRST.

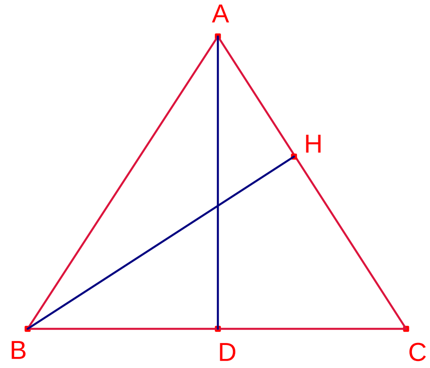
$$S_{PQR}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)a\right)^2,\ S_{PRST}=\left(\left(2-\sqrt{3}\right)a\right)^2.$$

L'àrea de l'estel és:

$$S_{estel}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)a\right)^2+\left(\left(2-\sqrt{3}\right)a\right)^2=\left(3\sqrt{3}-5\right)a^2.$$

152.- Un triangle isòsceles el costat desigual mesura 5cm i l'altura sobre un dels costats iguals mesura 4.2cm. Calculeu l'àrea del triangle.
Olabarrieta, pàgina 161. Problema 11.

Solució:



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=5$.
Siga $\overline{BH}=4.2$ altura del triangle.
Siga $h=\overline{AD}$ altura del triangle.

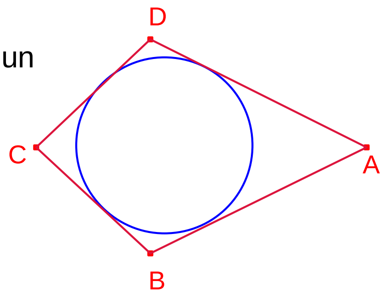
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHC}$:
$\overline{HC}=\sqrt{5^2-4.2^2}=\sqrt{7.36}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BHC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}.$$

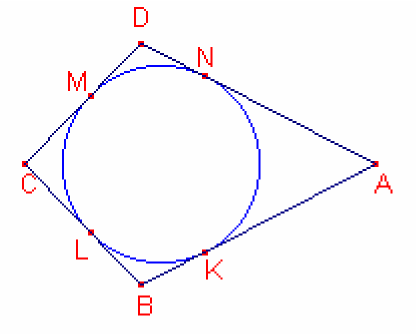
$\frac{2h}{5}=\frac{42}{\sqrt{736}}$. Resolent l'equació: $h=\frac{105\sqrt{46}}{184}$.

$$S_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot h}{2}=\frac{5\cdot\frac{105\sqrt{46}}{184}}{2}=\frac{525\sqrt{46}}{368}\approx 9.68\text{cm}^2.$$



153.- El quadrilàter ABCD és tal que els seus costats són tangents a un cercle donat com el de la figura.
Si $\overline{AB} = \overline{AD}$, demostreu que $\overline{BC} = \overline{CD}$.
Crux Mathematicorum M395.

Solució:



Siga K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència amb els costats $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, respectivament.

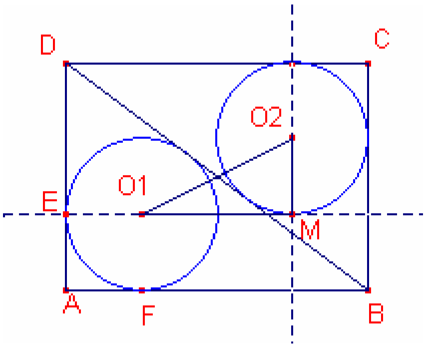
$\overline{AK} = \overline{AN}$, $\overline{BK} = \overline{BL}$, $\overline{CL} = \overline{CM}$, $\overline{DM} = \overline{DN}$.

Com $\overline{AB} = \overline{AD}$ y $\overline{AK} = \overline{AN}$ aleshores, $\overline{BK} = \overline{DN}$.

$\overline{BC} = \overline{BL} + \overline{CL} = \overline{BK} + \overline{CM} = \overline{DN} + \overline{CM} = \overline{DM} + \overline{CM} = \overline{CD}$.

154.- En un rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=8$ i $\overline{BC}=6$ s'han inscrit dos cercles de centres O_1 i O_2 en els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{BCD}$, respectivament. Determineu la distància entre O_1 i O_2.
Crux Mathematicorum M396.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$$r=\overline{O_1E}=\overline{O_1F}=\frac{-\overline{BD}+\overline{AB}+\overline{AD}}{2}=\frac{-10+8+6}{2}=2.$$

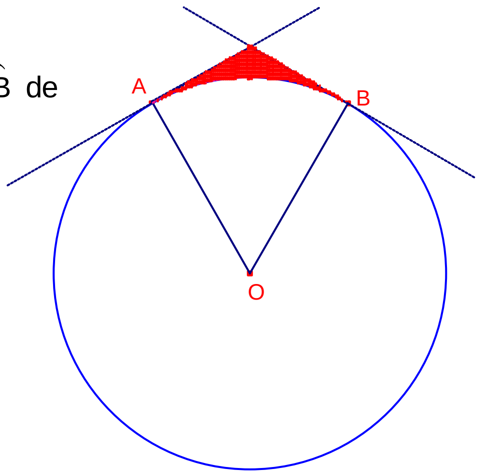
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDB}$ és igual al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, per tant tenen igual radi de la circumferència inscrita.

Tracem la recta perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa pel punt O_2 i la recta perpendicular al costat $\overline{BC}$ que passa pel punt O_1. Les dues rectes es tallen en el punt M.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1MO_1}$.
$\overline{O_1M}=\overline{AB}-2\cdot\overline{O_1E}=4$, $\overline{O_2M}=\overline{AD}-2\cdot\overline{O_1F}=2$.

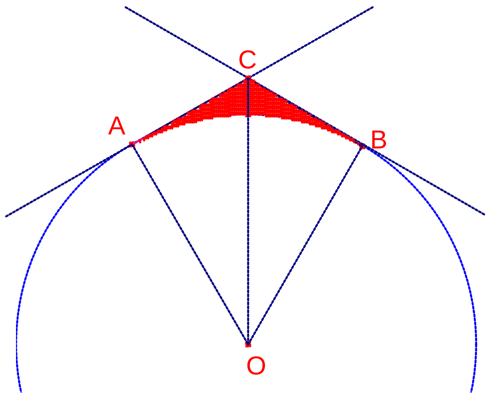
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1MO_1}$:
$\overline{O_1O_2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

155.- En una circumferència de radi R es traça un arc $\overset{\frown}{AB}$ de 60º.
Determineu l'àrea limitada per l'arc anterior i les tangents a la circumferència en els punts A i B.



Solució:
Siga C el punt on es tallen les rectes tangents.

El triangle $\overset{\Delta}{OAC}$ és rectangle $A = 90º$, $O = 30º$.
Siga $x = \overline{AC}$, aleshores, $\overline{OC} = 2x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$:
$(2x)^2 = R^2 + x^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} R.$$

L'àrea del quadrilàter OACB és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAC}$:

$$S_{OACB} = 2 \cdot S_{OAC} = 2 \cdot \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} R^2.$$

L'àrea del sector d'arc $\overset{\frown}{AB}$ és igual a la sisena part de l'àrea del cercle:

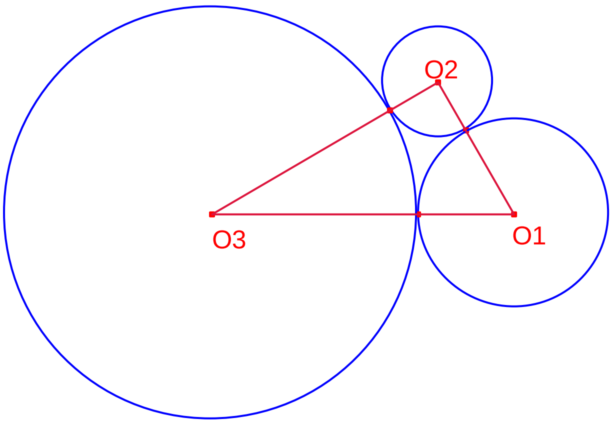
$$S_{\sec tor} = \frac{1}{6} \pi R^2.$$

L'àrea del recinte limitat per l'arc $\overset{\frown}{AB}$ i les tangents a la circumferència en els punts A i B és igual a l'àrea del quadrilàter OACB menys l'àrea del sector d'arc $\overset{\frown}{AB}$:

$$S = S_{OACB} - S_{\sec tor} = \frac{\sqrt{3}}{3} R^2 - \frac{\pi}{6} R^2 = \left(\frac{2\sqrt{3} - \pi}{6} \right) R^2.$$

156.- Tres circumferències de radis $3-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-1$, $1+\sqrt{3}$ són tangents exteriors dos a dos.
Calculeu l'àrea del recinte limitat pels 3 punts de tangència i les tres circumferències.

Solució:



Siga O_1 el centre de la circumferència de radi $3-\sqrt{3}$.
Siga O_2 el centre de la circumferència de radi $\sqrt{3}-1$.
Siga O_3 el centre de la circumferència de radi $1+\sqrt{3}$.
$\overline{O_1O_2}=2$, $\overline{O_1O_3}=4$, $\overline{O_2O_3}=2\sqrt{3}$.
Notem que $\overline{O_1O_3}^2=\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2O_3}^2$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$, és rectangle.
A més a més $\angle O_1O_2O_3=90^o$, $\angle O_1O_3O_2=30^o$.

L'àrea del recinte limitat pels punts de tangència és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$ menys l'àrea de tres sectors de centres el centre de les tres circumferències i d'arcs els que limiten els punts de tangència.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1O_2O_3}$ és:

$$S_1=\frac{\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_2O_3}}{2}=2\sqrt{3}.$$

L'àrea del sector de centre O_1 i 60º és:

$$S_{s1}=\frac{1}{6}\left(\pi\left(3-\sqrt{3}\right)^2\right)=\pi\left(2-\sqrt{3}\right).$$

L'àrea del sector de centre O_2 i 90º és:

$$S_{s2}=\frac{1}{4}\left(\pi\left(\sqrt{3}-1\right)^2\right)=\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

L'àrea del sector de centre O_3 i 30º és:

$$S_{s3}=\frac{1}{12}\left(\pi\left(1+\sqrt{3}\right)^2\right)=\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right).$$

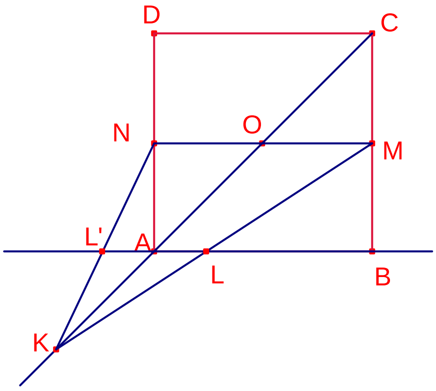
La superfície que cerquem és:

$$S=S_1-\left(S_{s1}+S_{s2}+S_{s3}\right)=2\sqrt{3}-\pi\left(\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right).$$

157.- Siguen M i N els punts migs dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$, respectivament, del quadrat ABCD.

Siga K un punt de la prolongació de la diagonal $\overline{CA}$ (A resta entre C i K).

El segment $\overline{KM}$ talla el costat $\overline{AB}$ en el punt L. Demostreu que els angles $\angle KNA$, $\angle LNA$ són iguals.



Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ costat del quadrat.
La recta KN talla la recta AB en el punt L'.
La recta MN passa pel centre O del quadrat.

$\overline{OM} = \overline{ON} = \frac{a}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{KON}$, $\overset{\Delta}{KAL'}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AL}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}$, aleshores, $\overline{AL} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{KOM}$, $\overset{\Delta}{KAL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AL'}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}$, aleshores, $\overline{AL'} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\overline{KA}}{\overline{KO}}$.

Aleshores, $\overline{AL} = \overline{AL'}$.

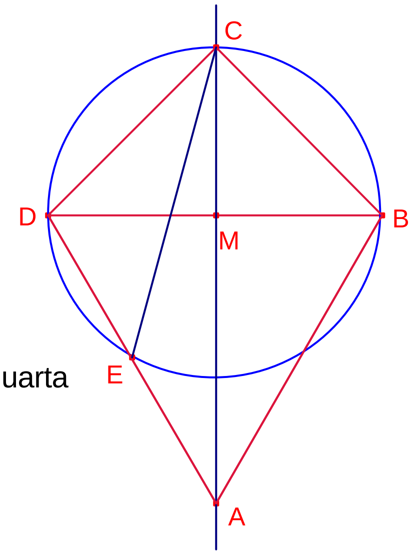
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ALN}$, $\overset{\Delta}{AL'N}$ són iguals ja que tenen els catets corresponents iguals.
Aleshores, $\angle LNA = \angle L'NA$, per tant, $\angle LNA = \angle KNA$.

158.- Siga ABCD un quadrilàter convex tal que el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és equilàter i el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles amb $C = 90^o$. Si E és el punt mig del costat $\overline{AD}$, calculeu la mesura de l'angle $\angle CED$.
Olimpiada de mayo. Argentina. 2009.

Solució 1:
Amb aquesta definició el quadrilàter és un cometa de costats:

$\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{BD}$ que és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.



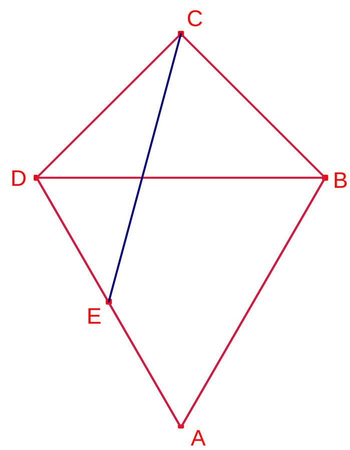
Aquesta circumferència passa pel punt mig E del costat $\overline{AD}$ ja que $\overline{MD} = \overline{ME} = \frac{a}{2}$.

$\angle CED$ és un angle inscrita a la circumferència que abraça la quarta par de la circumferència aleshores:

$\angle CED = \frac{90^o}{2} = 45^o$.

Solució 2:
Amb aquesta definició el quadrilàter és un cometa de costats:

$\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{BC} = \overline{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.



$\angle BDA = 60^o$, $\angle CDB = 45^o$. Aleshores, $\angle CDE = 105^o$

Siga $\alpha = \angle CED$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin(105^o+\alpha)}$. Simplificant:

$\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(105^o+\alpha)}$.

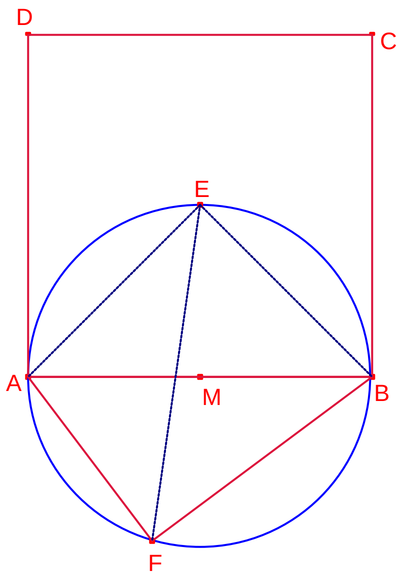
$\sqrt{2}\cdot\sin(105^o+\alpha) = \sin\alpha$. Com que $\sin 105^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ i $\cos 105^o = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$:

$\frac{2-2\sqrt{3}}{4}\sin\alpha + \frac{2+2\sqrt{3}}{4}\cos\alpha = \sin\alpha$. Simplificant:

$(1+\sqrt{3})\cos\alpha = (1+\sqrt{3})\sin\alpha$.

$\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, aleshores, $\alpha = \angle CED = \mathrm{arctg}\,1 = 45^o$.

159.- Sobre el costat $\overline{AB}$ del quadrat ABCD es dibuixa exteriorment el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$ d'hipotenusa $\overline{AB}$ tal que $\overline{AF}=6$, i que $\overline{BF}=8$.
Siga E el centre del quadrat. Calculeu la longitud de $\overline{EF}$.
Olimpiada de mayo. Argentina. 2008.



Solució 1:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.
Aplicant el teorema de Pitàgores el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{AE}=\overline{BE}=10\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}.$$

Siga M en punt mig del costat $\overline{AB}$.

M és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$.
A més a més, $\overline{MA}=\overline{ME}$.

Aleshores, E pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$.
Per tant el quadrilàter AFBE és inscriptible en la circumferència.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$\overline{AF}\cdot\overline{BE}+\overline{BF}\cdot\overline{AE}=\overline{AB}\cdot\overline{EF}$.
$6\cdot5\sqrt{2}+8\cdot5\sqrt{2}=10\overline{EF}$.
Aleshores, $\overline{EF}=7\sqrt{2}$.

Solució 2:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{AE}=\overline{BE}=10\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2},\ \angle EAB=45^{o}.$$

Siga $\alpha=\angle BAF$, $\cos\alpha=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

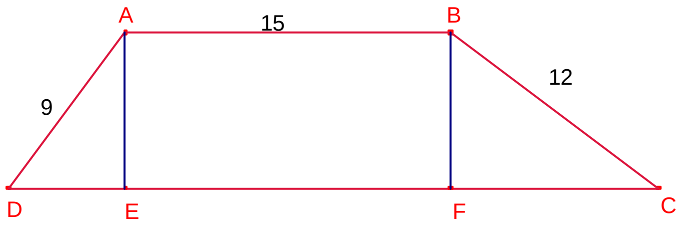
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AFE}$.
$\overline{EF}^2=\overline{AE}^2+\overline{AF}^2-2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AF}\cos(\alpha+45^{o})$.

$$\overline{EF}^2=50+36-2\cdot5\sqrt{2}\cdot6\cdot\left(\frac{3}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

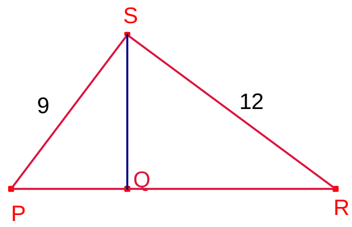
$\overline{EF}^2=98$.
Aleshores, $\overline{EF}=7\sqrt{2}$.

160.- Els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ d'un trapezi ABCD són paral·lels. Si $\overline{AB}=15$, $\overline{CD}=30$, $\overline{AD}=9$ i $\overline{BC}=12$, determineu l'àrea del trapezi ABCD.
Crux Mathematicorum M415.

Solució:



AB=EF=15
DE+FC=30-15



PQ=DE, QG=FC
PR=15

Siga $h=\overline{AE}$ l'altura del trapezi.
L'àrea del trapezi ABCD és igual a:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2}\cdot\overline{AE}=\frac{45h}{2}.$$

$$S_{ABC}=S_{ADA}+S_{ABFE}+S_{FCB}=S_{PRS}+S_{ABFE}.$$

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{PRS}$ es rectangle ja que $\overline{PR}^2=\overline{PS}^2+\overline{RS}^2$, $15^2=9^2+12^2$.
l'altura $\overline{SQ}=\overline{AE}=h$ del triangle $\overset{\Delta}{PRS}$.

$$S_{PRS}=\frac{\overline{PS}\cdot\overline{RS}}{2}=\frac{9\cdot 12}{2}=54.$$

$$S_{PRS}=\frac{\overline{PR}\cdot\overline{SQ}}{2}=\frac{15\cdot h}{2}.$$

Igualant les àrees:
$\frac{15h}{2}=54$. Per tant, l'altura del trapezi és: $h=\frac{36}{5}$.
Aleshores, l'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD}=\frac{45h}{2}=\frac{45}{2}\frac{36}{5}=162.$$

Solució 2:
Siga $x=\overline{FC}$, $h=\overline{AE}=\overline{BF}$.
Aleshores, $\overline{EF}=15$, $\overline{DE}=15-x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{DEA}$, $\overset{\Delta}{CFB}$:

$$\begin{cases} h^2+(15-x)^2=9^2 \\ x^2+h^2=12^2 \end{cases}, \text{ la solució del sistema és } \begin{cases} x=\frac{48}{5} \\ h=\frac{36}{5} \end{cases}.$$

L'àrea del trapezi és: $S_{ABCD}=\frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2}\cdot\overline{AE}=\frac{30+15}{2}\frac{36}{6}=162$.