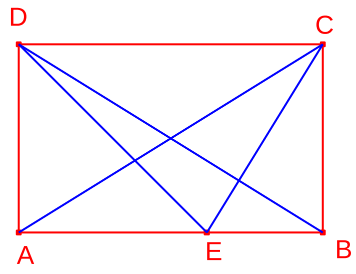
Problemes de Geometria per a l'ESO 160

1591.- Siga ABCD el rectangle de costats $\overline{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\overline{BC}=1$.

Siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AE}=1$.

Proveu que $\angle ACE=2\angle EBD$.

KöMaL, B4706.



Solució:

Siga $\alpha=\angle BDE$, $\beta=\angle ABD$, $\gamma=\angle ACE$.

Siga $\overline{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$, nombre d'or.

$\overline{BE}=\Phi-1=\frac{1}{\Phi}$ (propietat del nombre d'or).

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAD}$, $\overset{\Delta}{CBE}$ són semblants ja que els catets són proporcionals:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\Phi}{1}=\Phi$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}=\frac{1}{\frac{1}{\Phi}}=\Phi$.

Aleshores, $\angle BCE=\angle ABD=\beta$.

$\angle BDA=\angle ACB=90-\beta$.

$\angle ADE=\angle AED=45^o$.

$\angle AED=\angle BDE+\angle EBD$.

$45^o=\alpha+\beta$ (1)

$\angle BDA=\angle ACB$.

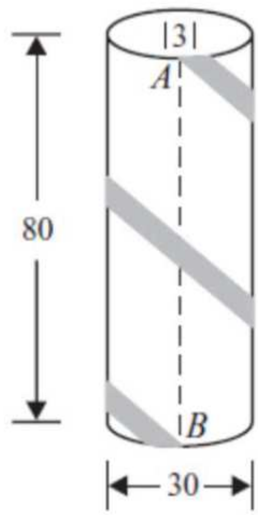
$45^o+\alpha=\beta+\gamma$ (2)

Restant els expressions (1) (2):

$-\alpha=\alpha-\gamma$ (3)

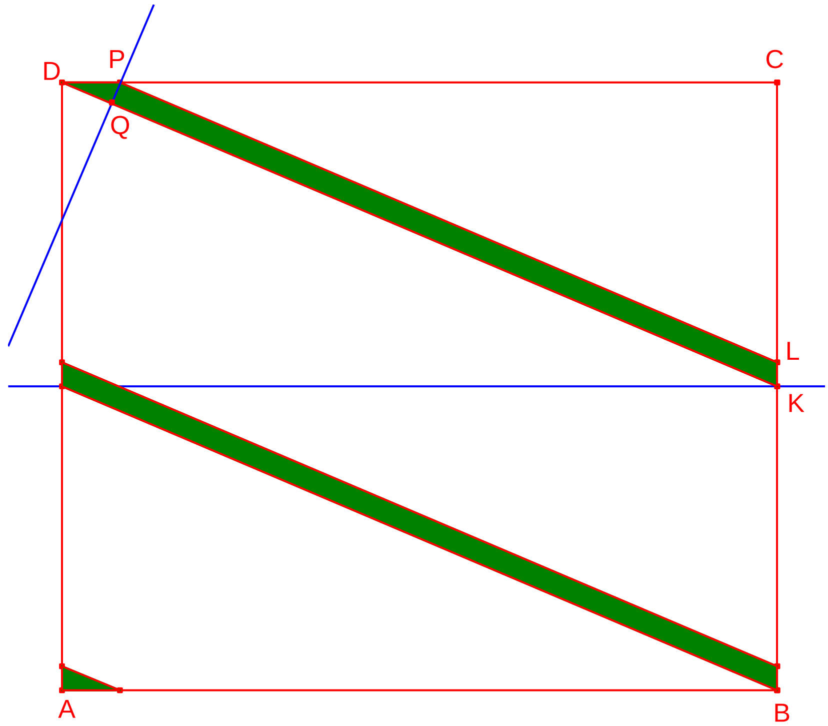
Aleshores, $\gamma=2\alpha$, és a dir, $\angle ACE=2\angle EBD$.

1592.- En un cilindre de 30cm de diàmetre i una altura de 80cm tracem una banda rectangular de 3cm d'ample que li dóna dues voltes uniformement com mostra la figura.



Calculeu l'àrea de la banda.

Solució:



Si tallem verticalment el cilindre, aquest es transforma en un rectangle ABCD tal que $\overline{AD}=80$, $\overline{AB}=30\pi$ longitud de la circumferència de diàmetre 30.

Siga K el punt mig del costat $\overline{BC}$. $\overline{KC}=40$.

La banda forma un paral·lelogram de base $\overline{DP}$ i altura $\overline{AD}=80$.

Siga Q la projecció de P sobre $\overline{DK}$. $\overline{PQ}=3$.

Siga $\overline{DP}=x$

Els triangles $\overset{\Delta}{DCK}$, $\overset{\Delta}{DQP}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{40}{30\pi}=\frac{3}{\sqrt{x^2-9}}$. Resolent l'equació:

$x=\frac{3}{4}\sqrt{9\pi^2+16}$.

L'àrea de la banda és:

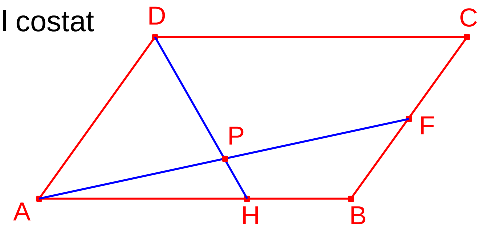
$S_{banda}=80x=60\sqrt{9\pi^2+16}\approx 614.31\,cm^2$.

1593.- Siga H el punt més proper del vèrtex B que divideix el costat $\overline{AB}$ del paral·lelogram ABCD en proporció 1:2.

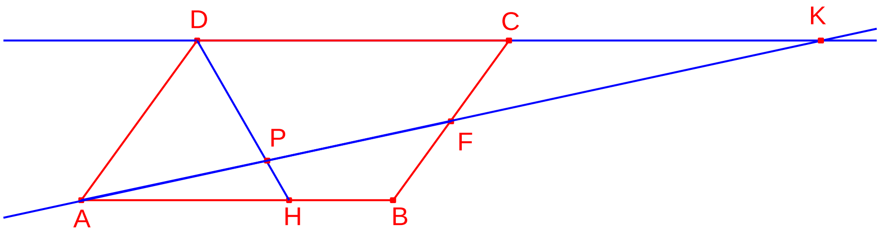
Siga F el punt mig del costat $\overline{BC}$.

En quina relació divideix el segment $\overline{AF}$ la intersecció dels segments $\overline{AF}$ i $\overline{DH}$.

KöMaL, C1288.



Solució:



La recta AF talla la recta CD en el punt K.

Siga $\overline{BH} = a$, $\overline{AH} = 2a$.

$\overline{BF} = \overline{CF}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABF}$, $\overset{\Delta}{KCF}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CK} = \overline{AB} = 3a$, $\overline{AF} = \overline{KF}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AHP}$, $\overset{\Delta}{KDP}$ són semblants i de raó 1:3:

Aleshores, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{KP}} = \dfrac{1}{3}$

$\overline{AF} = \overline{AP} + \overline{PF}$.

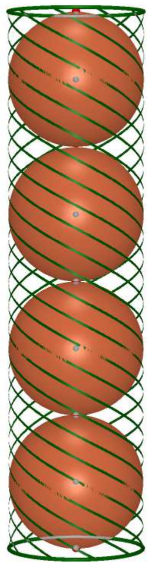
$3 \cdot \overline{AP} = \overline{PK} = \overline{PF} + \overline{AF}$.

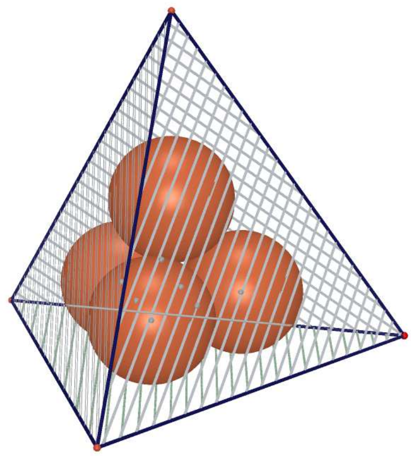
$3 \cdot \overline{AP} = \overline{PF} + \overline{AP} + \overline{PF}$, aleshores:

$\overline{AP} = \overline{PF}$.

1594.- Quatre pilotes d'igual radi són tangents a les cares d'un tetraedre regular.

Altres cuatre pilotes iguals a les anteriors són tangents a les cares i bases d'un cilindre.
Determineu la proporció entre l'àrea del tetraedre i l'àrea del cilindre.
KöMaL, C1293.





Solució:
Siga r el radi de les 8 esferes.

a) Calculem l'àrea del tetraedre regular.
Si l'aresta del tetraedre és a, la seua superfície és:

$S_{Tetraedre} = a^2\sqrt{3}$.

El radi de l'esfera inscrita al tetraedre és:

$r_a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$.

Considerem el tetraedre regular format pels centres de les 4 esferes tangents al tetraedre.
Els dos tetraedres regulars són homotètics i el centre d'homotècia és el centre comú dels dos tetraedres.
L'aresta del tetraedre regular format pels centres de les 4 esferes és 2r.

El radi de l'esfera inscrita al tetraedre format pels centres de les 4 esferes és:

$r_i = \frac{\sqrt{6}}{12}2r$.

Notem que $r_a = r_i + r$.

$\frac{\sqrt{6}}{12}a = \frac{\sqrt{6}}{12}2r + r$. Resolent l'equació:

$a = 2\left(1+\sqrt{6}\right)r$.

La superfície del tetraedre exterior és:

$S_{Tetraedre} = a^2\sqrt{3} = 4\left(7+2\sqrt{6}\right)\sqrt{3}\, r^2$.

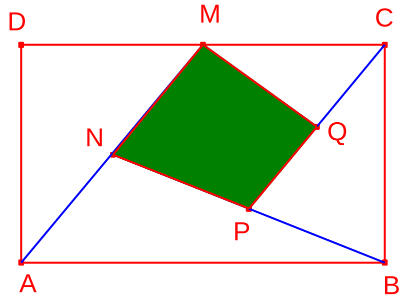
b) Calculem l'àrea del cilindre tangent a les 4 esferes.
El cilindre té radi r i altura 8r:

$S_{Cilindre} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 8r = 18\pi r^2$

c) Calculem la proporció entre les dues àrees:

$$\frac{S_{Tetraedre}}{S_{Cilindre}} = \frac{4\left(7+2\sqrt{6}\right)\sqrt{3}\, r^2}{18\pi r^2} = \frac{2\left(7+2\sqrt{6}\right)\sqrt{3}\, r^2}{9\pi r^2} \approx 1.4578.$$

1595.- En el rectangle ABCD de la figura, M és el punt mig de $\overline{DC}$, N és el punt mig de $\overline{AM}$, P és el punt mig de $\overline{BN}$, i Q és el punt mig de $\overline{CP}$.
Determineu la relació entre l'àrea del quadrilàter MNPQ i la del rectangle ABCD.
Cangur 2015, nivell 4, p.28.



Solució:
Siga S l'àrea del rectangle ABCD.

$S_{ADM} = S_{BCM} = \frac{1}{4}S$.

$S_{ABM} = S - S_{ADM} - S_{BCM} = \frac{1}{2}S$.

$S_{ANB} = S_{NMB} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{4}S$.

$S_{NPM} = \frac{1}{2}S_{NBM} = \frac{1}{8}S$.

$S_{CMA} = S_{MDA} = \frac{1}{4}S$.

$S_{NMC} = \frac{1}{2}S_{CMA} = \frac{1}{8}S$.

$S_{NCB} = S - S_{ADM} - S_{CNM} - S_{ABN} = \frac{3}{8}S$.

$S_{BPC} = S_{NPC} = \frac{1}{2}S_{NCB} = \frac{3}{16}S$.

$S_{PMC} = S - S_{ADM} - S_{NPM} - S_{ANB} - S_{BPC} = \frac{3}{16}S$.

$S_{PQM} = \frac{1}{2}S_{PMC} = \frac{3}{32}S$.

$S_{MNPQ} = S_{NPM} + S_{PQM} = \frac{1}{8}S + \frac{3}{32}S = \frac{7}{32}S$.

La proporció entre l'àrea del quadrilàter MNPQ i la del rectangle ABCD és:

$\frac{S_{MNPQ}}{S} = \frac{7}{32}$.

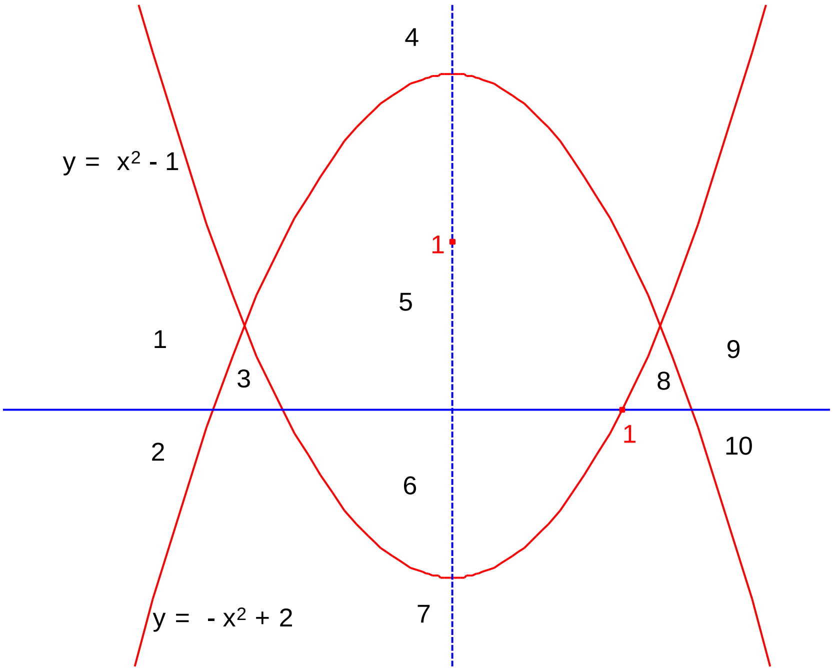
1596.- En quantes regions divideix el plànol l'eix d'abscisses i les gràfiques de les funcions $f(x) = 2 - x^2$ i $g(x) = x^2 - 1$.

Cangur 2015, nivell 4, p.11.

Solució:

La funció $f(x) = 2 - x^2$ és una paràbola convexa que passa pel punt $(0, 2)$ i els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

La funció $g(x) = x^2 - 1$ és una paràbola còncava que passa pel punt $(0, -1)$ i els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(-1, 0)$, $(1, 0)$.



El plànol queda dividit en 10 parts.

1597.- En un triangle rectangle, la bisectriu d'un dels angles aguts divideix el costat oposat en dos segments de longitud 1 i 2. Quina és la longitud de la bisectriu.

Cangur 2015, nivell 3, p.29.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.

Siga la bisectriu $\overline{BD}$ tal que $\overline{AD} = 1$, $\overline{CD} = 2$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

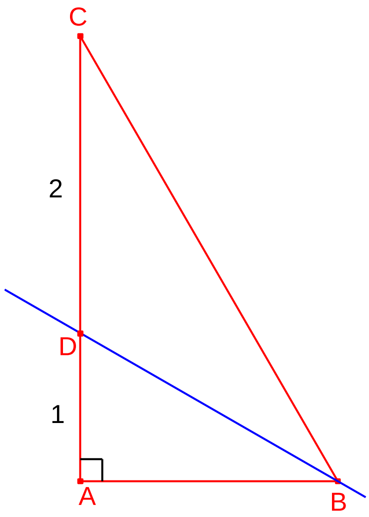
$\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{2}{\overline{BC}}$.

Aleshores, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$. Aleshores, $B = 60^o$.

$C = 30^o$, $\angle DBC = \frac{1}{2} 60^o = 30^o$.

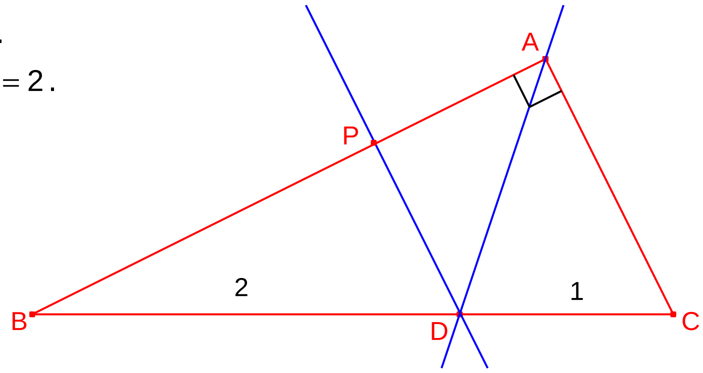
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{BDC}$ és isòsceles.

Per tant, $\overline{BD} = \overline{CD} = 2$.



1598.- En un triangle rectangle, la bisectriu de l'angle recte divideix la hipotenusa en dos segments de longitud 1 i 2. Quina és la longitud de la bisectriu.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.

Siga la bisectriu $\overline{AD}$ tal que $\overline{CD} = 1$, $\overline{BD} = 2$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{1}{\overline{AC}} = \frac{2}{\overline{AB}}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$.

Siga $\overline{AC} = x$, $\overline{AB} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$x^2 + (2x)^2 = 3^2$. Simplificant:

$$x^2 = \frac{9}{5}.$$

Siga P la projecció de D sobre el catet $\overline{AB}$.

Ales triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DP}}{2} = \frac{x}{3}$. Aleshores:

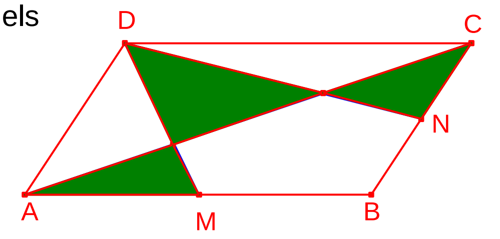
$$\overline{DP} = \frac{2}{3}x.$$

El triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és rectangle i isòsceles. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{AD}^2 = 2 \cdot \overline{DP}^2 = 2\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{8}{9}x^2 = \frac{8}{9}\frac{9}{5} = \frac{8}{5}.$$

$$\overline{AD} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

1599.- En el paral·lelogram ABCD, els punts M i N són els punts migs dels segments $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Si l'àrea del paral·lelogram és igual a 1, quina és l'àrea total de les parts ombrejades.

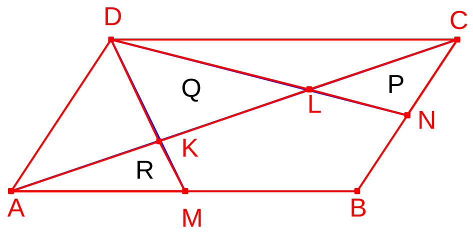


Cangur 2015, nivell 4, p.28. València

Solució:

Siga $S = 1$ l'àrea del paral·lelogram ABCD.

Siguen $S_{LNC} = P$, $S_{KLD} = Q$, $S_{AMK} = R$.



$S_{AMD} = S_{DNC} = \frac{1}{4}S$, $S_{ADC} = \frac{1}{2}S$.

$S_{DLC} = \frac{1}{4}S - P$.

$S_{AKD} = \frac{1}{4}S - R$.

Els triangles $\overset{\Delta}{LNC}$, $\overset{\Delta}{LDA}$ són semblants i de raó 1:2.

Aplicant el teorema de Tales:

$$Q + \frac{1}{4}S - P = 4R \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AMK}$, $\overset{\Delta}{CKD}$ són semblants i de raó 1:2.

Aplicant el teorema de Tales:

$$Q + \frac{1}{4}S - R = 4P \qquad (2)$$

$S_{ADC} = \frac{1}{2}S$, aleshores:

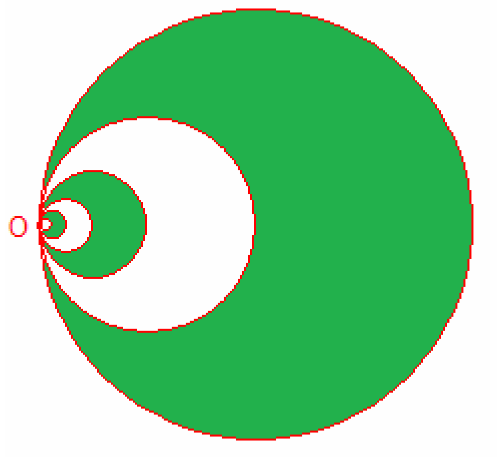
$$\frac{1}{4}S - R + Q + \frac{1}{4}S - P = \frac{1}{2}S \qquad (3)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1), (2), (3):

$$\begin{cases} -P + Q - 4R = \frac{1}{4}S \\ 4P - Q + R = \frac{1}{4}S \\ -P + Q - R = 0 \end{cases} \text{. Resolent el sistema: } \begin{cases} P = \frac{1}{12}S \\ Q = \frac{1}{6}S \\ R = \frac{1}{12}S \end{cases}.$$

Aleshores, la suma de les àrees de les parts ombrejades és:

$$P + Q + R = \frac{1}{12}S + \frac{1}{6}S + \frac{1}{12}S = \frac{1}{3}S.$$



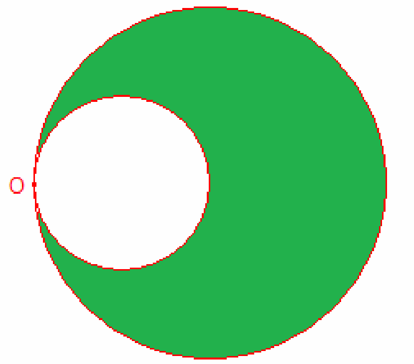
1600.- Un mag ha dissenyat una arracada feta d’infinits cercles.

Cada cercle passa per O i pel centre dels cercle pròxim més gran.
Tots els centres estan en la mateixa línia recta.
El cercle més gran té radi 10 unitats.
Quant mesura l’àrea ombrejada,
Cangur 2015, nivell 3, p.29. València

Solució:
Siga $r_1 = 10$ el radi de la circumferència exterior.

Siga $r_2 = \frac{10}{2} = 5$ la segona circumferència:

Siga $r_n = \frac{10}{2^{n-1}}$ la circumferència n-èsima.



Les àrees de regions ombrejades de les primeres 2n circumferències és:

$$S_{2n} = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 + \pi r_3^2 - \pi r_4^2 + \ldots\ldots\ldots + \pi r_{2n-1}^2 - \pi r_{2n}^2 .$$

$$S_{2n} = \pi\left(r_1^2 + r_3^2 + r_5^2 + \ldots\ldots + r_{2n-1}^2\right) - \pi\left(\pi r_2^2 + \pi r_4^2 + \ldots\ldots\ldots + \pi r_{2n}^2\right).$$

$$A_n = r_1^2 + r_3^2 + r_5^2 + \ldots\ldots + r_{2n-1}^2 .$$

$$A_n = 10^2 + \left(\frac{10}{4}\right)^2 + \left(\frac{10}{16}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{10}{4^{n-1}}\right)^2 .$$

$$A_n = 10^2\left(1 + \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right)$$

La suma d’una progressió geomètrica de primer terme 10^2 i raó $\frac{1}{16}$.

La suma infinita és: $A_\infty = \frac{10^2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1600}{15}$.

$$B_n = r_2^2 + r_4^2 + r_6^2 + \ldots\ldots + r_{2n}^2 .$$

$$B_n = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{8}\right)^2 + \left(\frac{10}{32}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{10}{2 \cdot 4^{n-1}}\right)^2 .$$

$$B_n = \left(\frac{10}{2}\right)^2\left(1 + \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right).$$

La suma d’una progressió geomètrica de primer terme 5^2 i raó $\frac{1}{16}$.

La suma infinita és: $B_\infty = \frac{5^2}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{400}{15}$.

La suma de les àrees ombrejades és: $S = \pi \cdot (A_\infty - B_\infty) = \pi\left(\frac{1600}{15} - \frac{400}{15}\right) = 80\pi$.