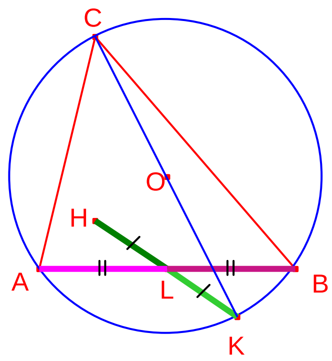
Problemes de Geometria per a l'ESO 161



1601.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga O el circumcentre i H l'ortocentre.

Siga $\overline{CK}$ un diàmetre.

Siga L la intersecció del segment $\overline{HK}$ i el costat $\overline{AB}$.

Proveu que L és el punt mig del segment $\overline{HK}$ i el costat $\overline{AB}$.

Solució:

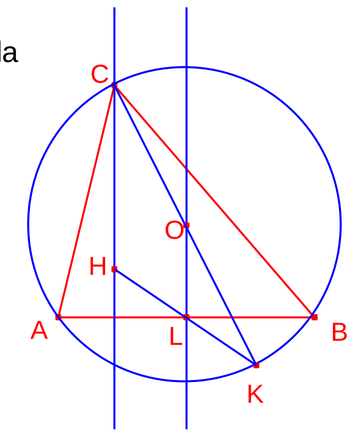
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CHK}$.

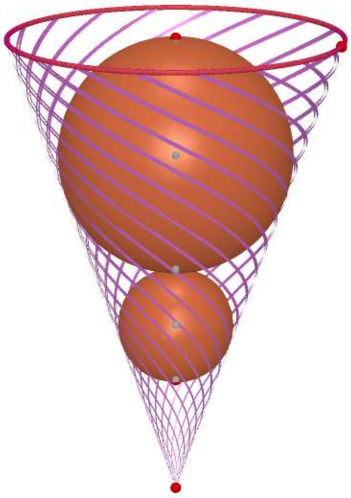
L'altura CH i la mediatriu del costat $\overline{AB}$ són paral·leles.

$\overline{OC} = \overline{OK}$, aleshores, la recta mediatriu del costat $\overline{AB}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{CHK}$.

La mediatriu del costat $\overline{AB}$ talla el costat $\overline{AB}$ en el punt mig.

Aleshores, L és el punt mig del costat $\overline{AB}$ i $\overline{HL} = \overline{KL}$ (per ser OI paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{CHK}$.

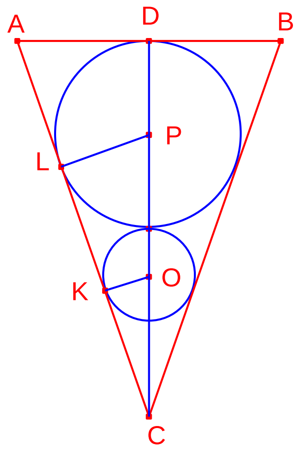




1602.- Un con està completament ple d'aigua i introduïm dues esferes, les dues tangents i cadascuna tangent a la superfícies del con (la major es tangent a la base del con).

Si el radi de l'esfera gran és el doble de l'esfera menuda i encara resta en el con un volum d'aigua de 2016π, determineu el radi de l'esfera menuda.
Concurso de Primavera 2016, primera fase, nivell 3, p 24.

Solució:



La secció axial del con és el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre del con.

Siga l'esfera menuda de centre O i radi $\overline{OK} = r$.

Siga l'esfera gran de centre P i radi $\overline{PD} = \overline{PL} = 2r$.

Siga $\overline{CD} = h$ altura del con.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKO}$, $\overset{\Delta}{CLP}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{OC} = \overline{OP} = 3r$. Aleshores:

$\overline{CD} = \overline{CP} + \overline{PD} = 6r + 2r = 8r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKO}$:

$\overline{CK} = r\sqrt{8}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CKO}$, $\overset{\Delta}{CDB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{R}{8r} = \frac{r}{r\sqrt{8}}$, aleshores:

$R = r\sqrt{8}$.

El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\left(r\sqrt{8}\right)^2 8r = \frac{64\pi}{3}r^3.$$

La suma del volum de les dues esferes és:

$$V_{suma} = \frac{4}{3}\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 12\pi r^3.$$

El volum que resta d'aigua després d'introduir les dues esferes és 2016π:

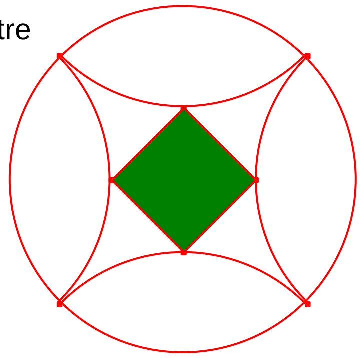
$$V_{con} - V_{suma} = \frac{64\pi}{3}r^3 - 12\pi r^3 = \frac{28\pi}{3}r^3.$$

$\frac{28\pi}{3}r^3 = 2016\pi$. Simplificant:

$r^3 = 216$. Resolent l'equació:

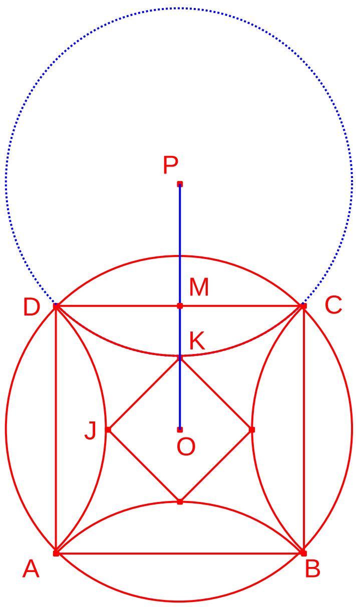
$r = 6$.

1603.- En la figura s'observa una circumferència de radi 1 i quatre arcs de radi 1 al seu interior.



Dins dels quatre arcs hi ha un quadrat.
La figura té quatre eixos de simetria.
Calculeu la longitud del costat del quadrat.
Concurso de Primavera 2015. Primera fase, nivell 4, problema 10.

Solució:
Siga $\overline{JK}$ els quadrat interior als quatre arcs.
Siga la circumferència de centre O i radi 1.
La intersecció dels arcs forma el quadrat ABCD.



Siga P el centre de l'arc $\overset{\frown}{CKD}$, $\overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PK}=1$.
Siga M el punt mig del costat. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OMC}$:

$\overline{OM}=\overline{CM}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{PM}=\overline{OM}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{OP}=2\overline{OM}=\sqrt{2}$.

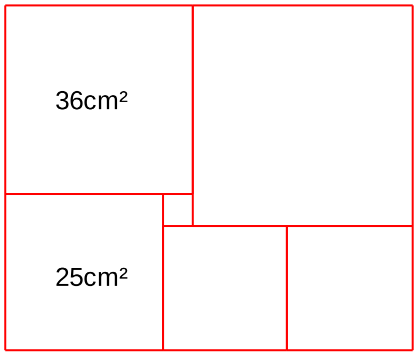
$\overline{OK}=\overline{OP}-\overline{PK}=\sqrt{2}-1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{JOK}$:

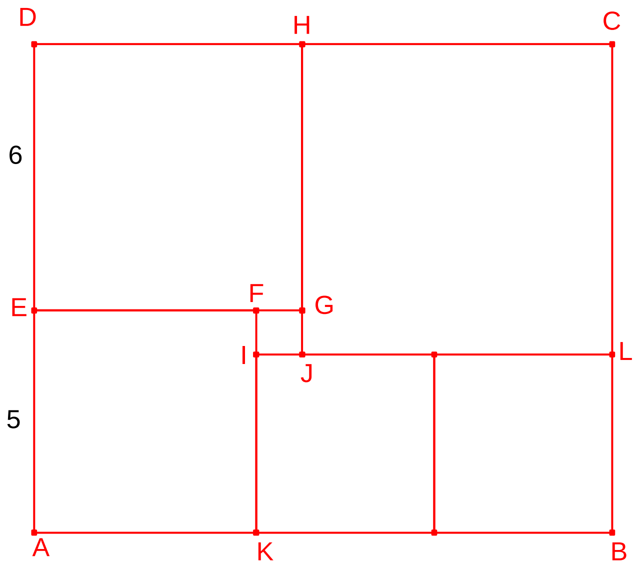
$\overline{JK}=\overline{OK}\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}=2-\sqrt{2}$.

1604.- Dividim un rectangle en sis quadrats com mostra la figura.

En la figura, es mostra l'àrea de dos quadrats.
Calculeu el perímetre del rectangle.
Concurso Primavera 2015. Fase final. Nivell 4, p. 14

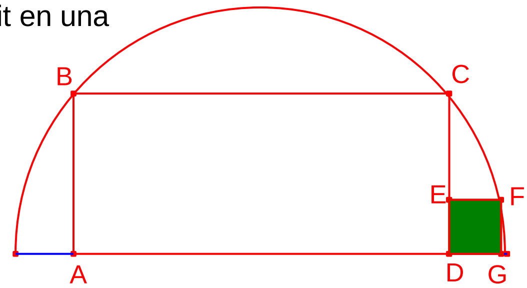


Solució:
Considrem el rectangle ABCD.
El el quadrat DEGH:
$\overline{DE} = \overline{DH} = \overline{EG} = \sqrt{36} = 6$.
En el quadrat AEFK:
$\overline{AE} = \overline{EF} = \sqrt{25} = 5$.
Aleshores, $\overline{AD} = 11$.
$\overline{EG} = \overline{EG} - \overline{EF} = 6 - 5 = 1$.
$\overline{KI} = \overline{AE} = \overline{EI} = 5 - 1 = 4$.
$\overline{KB} = 2\overline{KI} = 8$.
$\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB} = 5 + 8 = 13$.



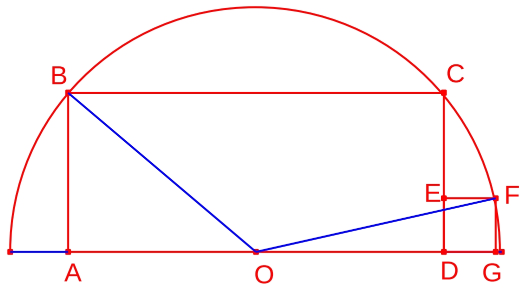
El perímetre del rectangle ABCD és:
$P_{ABCD} = 2\left(\overline{AD} + \overline{AB}\right) = 2(11 + 13) = 48$.

1605.- La figura adjunta mostra un rectangle ABCD inscrit en una semicircumferència i el seu diàmetre.



Les dimensions del rectangle són $\overline{AB}=12$ i $\overline{BC}=28$.
S'ha construït un quadrat DEFG com mostra la figura.
Calculeu l'àrea del quadrat DEFG.
Concurso Primavera 2015. Fase final. Nivell 4, p. 17

Solució:
Siga O el centre de la semicircumferència.



$\overline{OA}=\overline{OB}=14$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{OB}^2=12^2+14^2$.

$\overline{OB}=\overline{OF}$.

Siga $x=\overline{DG}=\overline{FG}$ costats del quadrat:

$\overline{OG}=14+x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OGF}$:

$12^2+14^2=x^2+(14+x)^2$.

Simplificant:

$x^2+14x-72=0$.

Resolent l'equació:

$x=4$.

L'àrea del quadrat DEFG és:

$S_{DEFG}=x^2=4^2=16$.

1606.- En una circumferència inscrivim un quadrilàter ABCD en què $\angle BAC = 70^{o}$, $\angle ADB = 40^{o}$, $\overline{AD} = 4$ i $\overline{BC} = 6$.

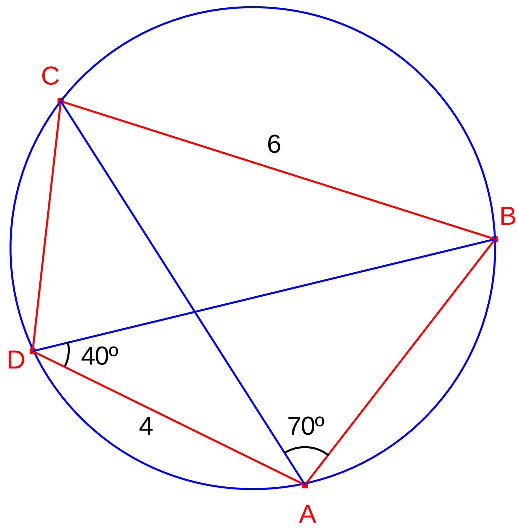
Calculeu la mesura del segment $\overline{AC}$.

Concurso Primavera 2015. Fase final. Nivell 4, p. 23

Solució:

Per ser angle inscrit en la circumferència i abraçar el mateix arc:

$\angle ACB = \angle ADB = 40^{o}$.



Considerant el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\angle ABC = 180^{o} - (\angle ACB + BAC) = 180^{o} - (40^{o} + 70) = 70^{o}$.

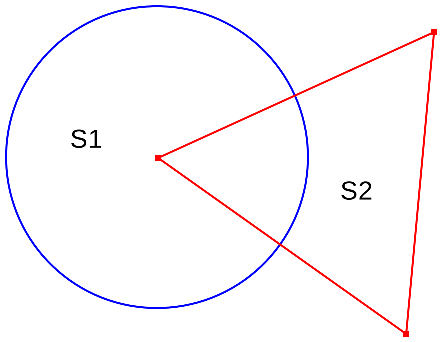
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.

Aleshores, $\overline{AC} = \overline{BC} = 6$.

1607.- El centre d'una circumferència de radi 2 és a la vegada vèrtex d'un triangle equilàter de costat 4.

Calculeu la diferència entres l'àrea de la regió interior al cercle però exterior al triangle i l'àrea de la regió interior al triangle però exterior al cercle.
Concurso Primavera 2015. Fase final. Nivell 4, p. 24

Solució:
Siga S_1 l'àrea de la regió interior al cercle però exterior al triangle.
Siga S_2 l'àrea de la regió interior al triangle però exterior al cercle.
Siga C l'àrea del cercle.
Siga T l'àrea del triangle.



$S_1 + T = C + S_2$.
Aleshores:

$$S_1 - S_2 = C - T = \pi 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} 4^2 = 4\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

1608.- Determineu l'àrea del triangle determinat per les rectes $y=-2x+8$, $y=\frac{1}{2}x-2$ i $x+2=0$.

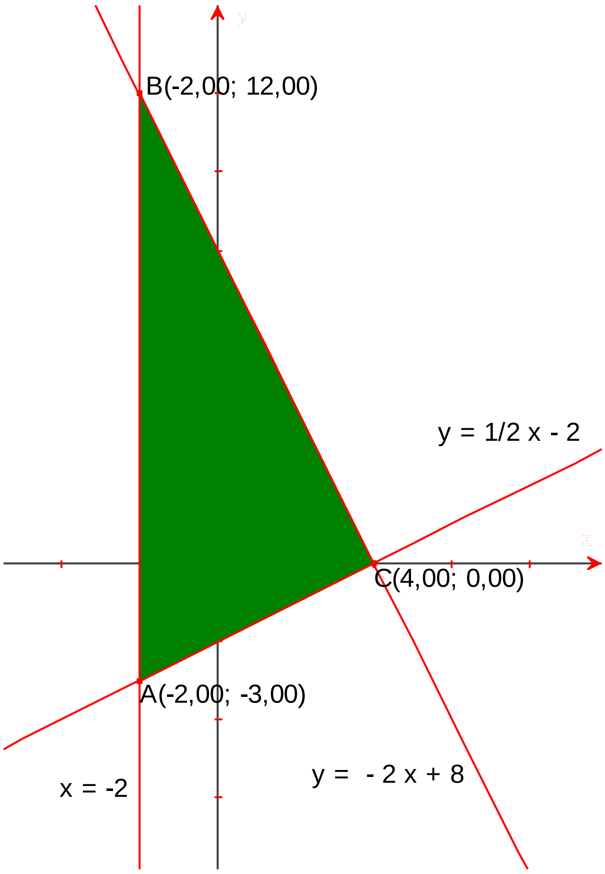
Concurso Primavera 2015. Fase final. Nivell 4, p. 16

Solució:

Siga A la intersecció de les rectes $y=\frac{1}{2}x-2$, $x+2=0$. Les seues coordenades són: $A(-2,-3)$.

Siga B la intersecció de les rectes $y=-2x+8$, $x+2=0$. Les seues coordenades són: $B(-2,12)$.

Siga C la intersecció de les rectes $y=\frac{1}{2}x-2$, $y=-2x+8$. Les seues coordenades són:
$C(4,0)$.



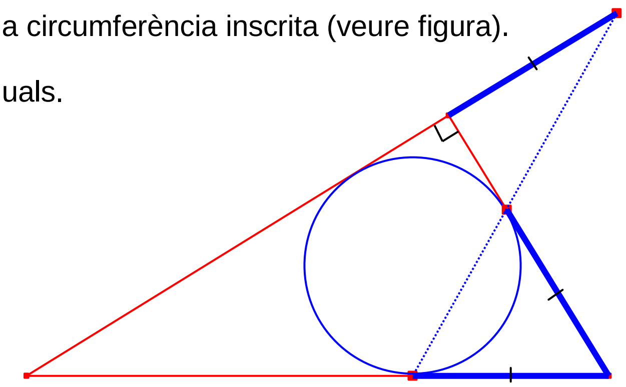
La base $\overline{AB}=14$.
La altura és:
$D(C,x=-2)=6$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{14\cdot 6}{2}=42.$$

1609.- En un triangle rectangle s'ha dibuixat la circumferència inscrita (veure figura).

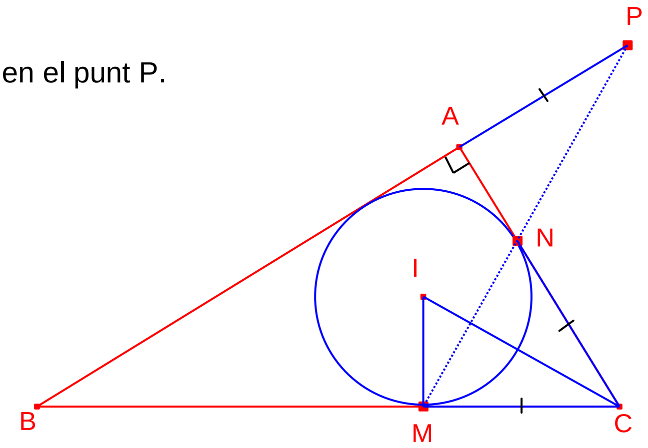
Proveu que les tres segments marcats són iguals.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.
Siga I el centre de la circumferència inscrita i r el seu radi.
Siguen M, N punts de tangència de la circumferència inscrita amb la hipotenusa i un catet $\overline{AC}$, respectivament

La recta MN talla la prolongació del catet $\overline{AB}$ en el punt P.



$\overline{IN} = \overline{IM} = \overline{AN} = r = \frac{b+c-a}{2}$.

$\overline{CM} = \overline{CN} = \frac{a+b-c}{2}$.

$\angle MCI = \angle ICN = \frac{C}{2}$.

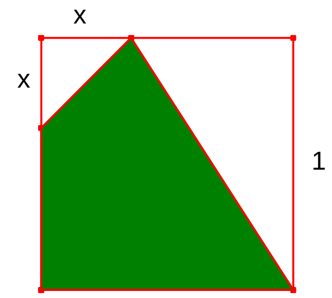
$\angle MNC = 90^o - \frac{C}{2}$.

$\angle NPA = \frac{C}{2}$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CMI}$, $\overset{\Delta}{PAN}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{CM}$.

1610.- Determineu el valor de x a fi que l'àrea ombrejada siga màxima.

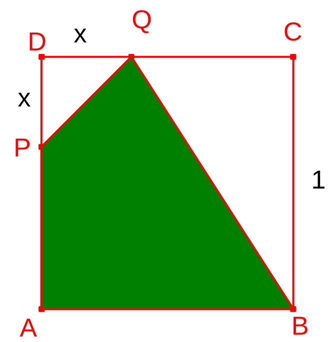


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat 1.

Siga $\overline{DP}=\overline{DQ}=x$.

$\overline{QC}=1-x$.



L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{PDQ}$, $\overset{\Delta}{QCB}$:

$$S_{\text{ombrejada}}=1^2-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1(1-x)}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Siga la funció $S(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $x\in[0,1]$.

La funció és una paràbola convexa.

El màxim s'assoleix en el vèrtex:

$$x=\frac{-\frac{1}{2}}{2\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

L'àrea màxima és $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$.