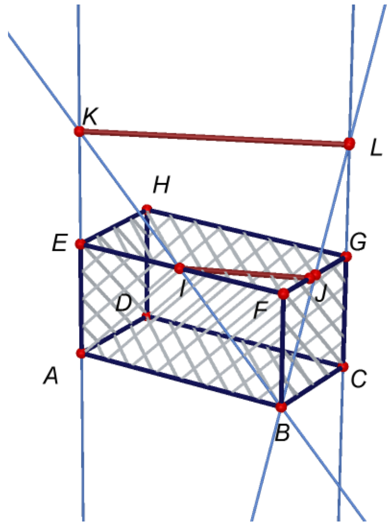
Problemes de Geometria per a l'ESO 162



1611.- Siga l'ortoedre ABCDEFGH de la figura.
Siga I el punt mig de l'aresta $\overline{EF}$ i J el punt mig de l'aresta $\overline{FG}$.
La recta BI intersecta la recta AE en el punt K.
La recta BJ intersecta la recta CG en el punt L.
a) Demostreu que la recta IJ és paral·lela a la recta KL.
b) Si les dimensions de l'ortoedre són $\overline{BC}=\overline{BF}=2\text{cm}$ i $\overline{AB}=4\text{cm}$ determineu la longitud del segment $\overline{KL}$.

Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{IFB}$, $\overset{\Delta}{IEK}$ són iguals, aleshores:
$\overline{BI}=\overline{KI}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{JFB}$, $\overset{\Delta}{JGL}$ són iguals, aleshores:
$\overline{BJ}=\overline{LJ}$.
Aleshores:
$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{KI}}{\overline{LJ}}.$$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{BIJ}$, $\overset{\Delta}{BKL}$ són semblants i de raó 1:2:

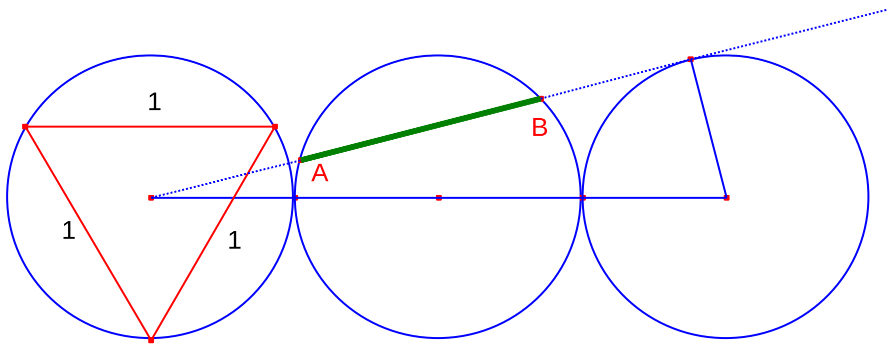
$\overline{FI}=2$, $\overline{FJ}=1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IFJ}$:
$\overline{IJ}=\sqrt{5}$.
$\overline{KL}=2\cdot\overline{IJ}=2\sqrt{5}$.

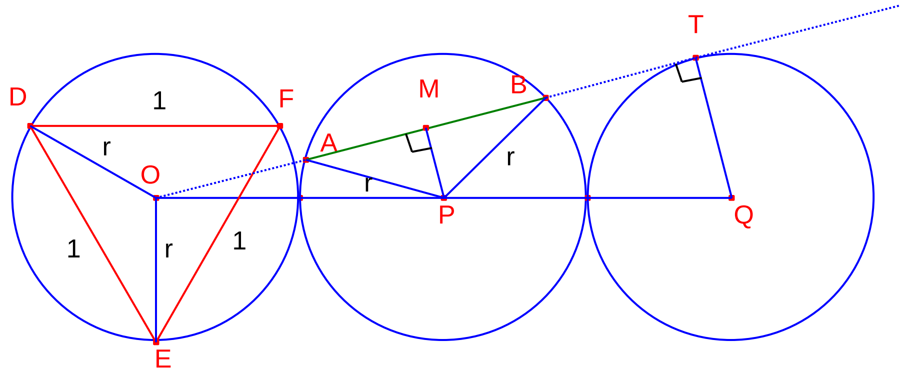
1612.- En la figura, les tres circumferències són iguals, tangents, i amb els centres alineats.

La primera circumferència té inscrit un triangle equilàter de costat 1.

Calculeu la mesura del segment $\overline{AB}$.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ de costat 1.

$\angle DOE = 120^{o}$.

Siguen O, P, Q els centres de les tres circumferències.

Siga r el radi de les tres circumferències.

Siga T el punt de tangència.

$\angle OTQ = 90^{o}$.

Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.

$\overline{PM}$ és perpendicular a la corda.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTQ}$, $\overset{\Delta}{OMP}$ són semblants i de raó $\overline{OQ} : \overline{OP} = 2 : 1$.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{QT} = \frac{1}{2}r .$$

$\overline{AP} = r$.

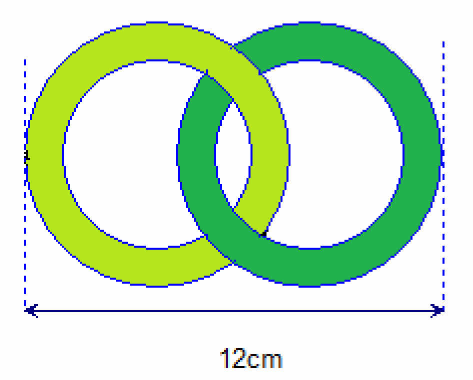
Aleshores, $\angle APM = 60^{o}$.

$\angle APB = 120^{o}$.

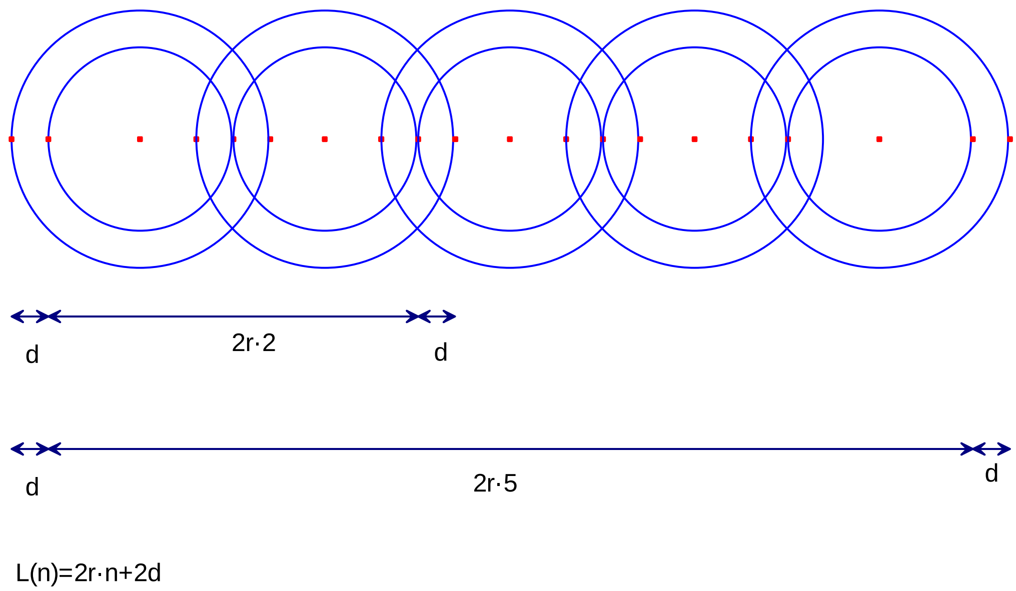
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{DOE}$, $\overset{\Delta}{APB}$ són iguals (LAL).

Aleshores, $\overline{AB} = \overline{DE} = 1$.

1613.- Una cadena amb dues anelles(baules) mesura 12cm de llarg.
Una cadena amb cinc anelles mesura 27cm.
Quina és la longitud d'una cadena amb 40 anelles.
Crux CC114.



Solució:
Siga r el radi interior de la anella que forma la cadena.
Siga d l'amplària de l'anella.



Si la cadena té dues anelles la seua longitud és:

$L_2 = 2 \cdot 2r + 2d$.

Si la cadena té cinc anelles la seua longitud és:

$L_5 = 5 \cdot 2r + 2d$.

Si la cadena té n anelles la seua longitud és:

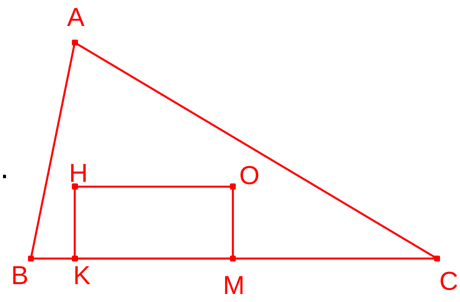
$L_n = n \cdot 2r + 2d$.

$\begin{cases} 2 \cdot 2r + 2d = 12 \\ 5 \cdot 2r + 2d = 27 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} r = \frac{5}{2} \\ d = 1 \end{cases}$.

La longitud d'una cadena de 40 anelles és:

$L_{40} = 40 \cdot 2\frac{5}{2} + 2 \cdot 1 = 202\text{cm}$.

1614.- Donat el rectangle HOMK.



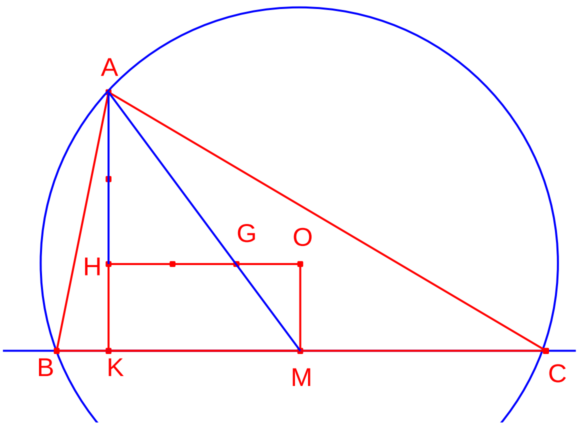
Si H és l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, O és el circumcentre, M el punt mig del costat $\overline{BC}$ i K el peu de l'altura relativa al costat $\overline{BC}$.

a) A partir del rectangle HOMK dibuixeu el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

b) Si $\overline{HO}=11$, $\overline{OM}=5$, determineu la mesura del costat $\overline{BC}$.

Solució:

a)



En qualsevol triangle, l'ortocentre el baricentre G i el circumcentre estan alineats i a més a més, $\overline{HG}=2\cdot\overline{GO}$

Per la propietat del baricentre, $\overline{AG}=2\cdot\overline{GM}$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GOM}$, $\overset{\Delta}{GHA}$ són semblants i de raó 1:2.

Procediment de construcció:

1. Sobre la recta KH dibuixem el punt A tal que $\overline{AH}=2\cdot\overline{OM}=2\cdot\overline{KH}$.
2. Dibuixem la circumferència de centre O que passa per A. Circumferència circumscrita al triangle.
3. La circumferència talla la recta KM en els punts B, C.
4. Dibuixem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

b)

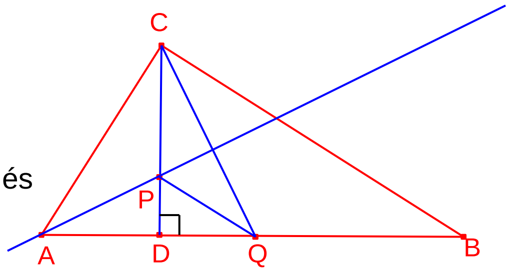
$\overline{AH}=2\cdot5=10$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHO}$:

$\overline{OA}=\sqrt{221}$. $\overline{OB}=\overline{OA}=\sqrt{221}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:

$\overline{BM}=14$.

$\overline{BC}=2\cdot\overline{BM}=28$.



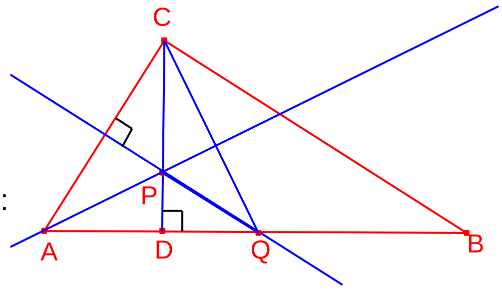
1615.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^{o}$.

Siga P un punt de l'altura $\overline{CD}$.

Siga Q un punt de la hipotenusa $\overline{AB}$ tal que el segment $\overline{PQ}$ és paral·lel al catet $\overline{BC}$.

Proveu que la recta AP és perpendicular al segment $\overline{CQ}$.

Solució:



Considerem la recta PQ que talla el catet $\overline{AC}$ en el punt K.

Per ser el segment $\overline{PQ}$ és paral·lel al catet $\overline{BC}$:

$\angle PDQ = B$.

$\angle ACD = B$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{PDQ}$, $\overset{\Delta}{PKC}$ són semblants. Aleshores:

$\angle PKC = 90^{o}$.

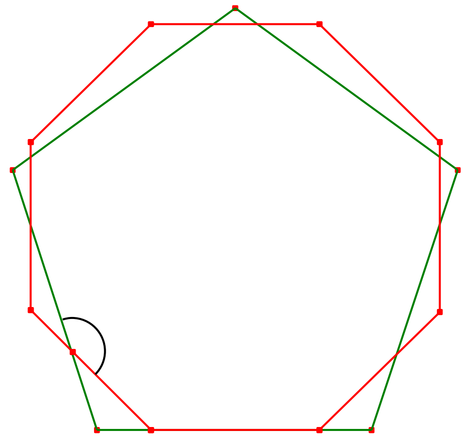
Aleshores, $\overline{CD}$ i $\overline{QK}$ són altures del triangle $\overset{\Delta}{AQD}$:

Aleshores, P és el seu ortocentre i per tant la recta AP és altura del triangle $\overset{\Delta}{AQD}$.

Aleshores, AP és perpendicular a $\overline{CQ}$.

Ricard Peiró i Estruch

1616.- En la figura hi ha un octògon i un pentàgon regulars.



Quant mesura l'angle assenyalat?

Olimpíada Al-khwarizmi València 2015. Segona fase nivell A.

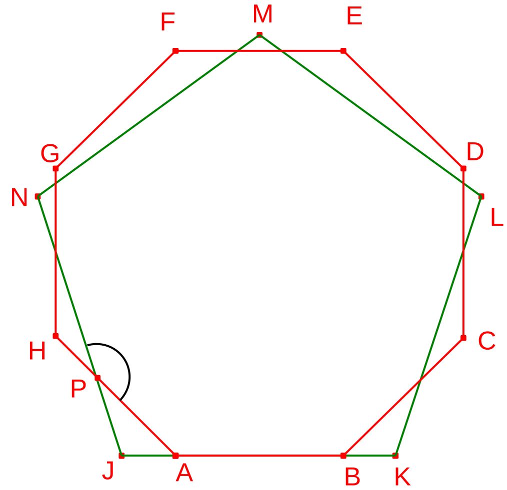
Solució:

Siga ABCDEFGH l'octògon regular.

Siga JKLMN el pentàgon regular.

Siga P la intersecció dels segments $\overline{AH}$, $\overline{JN}$.

L'angle que cerquem és $\angle NPA$.



L'angle interior de l'octògon regular mesura:

$\angle HAB = 135^o$.

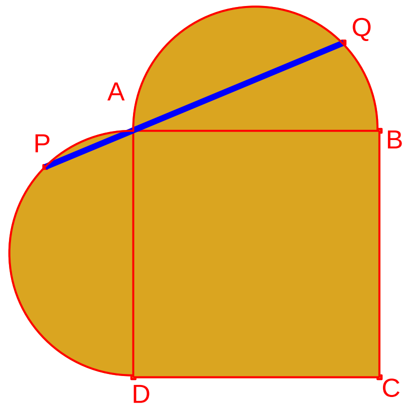
L'angle interior del pentàgon regular mesura:

$\angle NJK = 108^o$.

$\angle JAP = 180^o - 135^o = 45^o$

Aleshores, l'angle que cerquem mesura:

$\angle NPA = \angle PJA + \angle JAP = 108^o + 45^o = 153^o$.



1617.- En la figura podem observar un quadrat i dues semicircumferències.

El vèrtex A divideix el segment $\overline{PQ}$ en dues parts de longituds 12 i 5 cm.

Calculeu l'àrea de la figura completa.

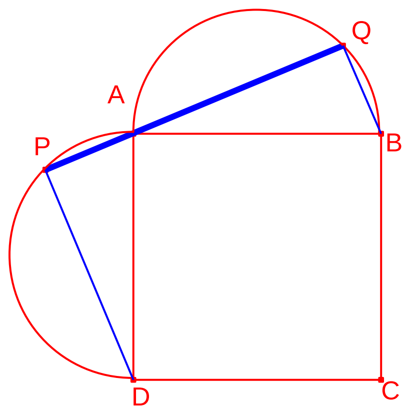
Olimpíada Al-khwarizmi València 2015. Segona fase nivell A.

Solució:

Siga $\overline{AP} = 5$, $\overline{AQ} = 12$.

$\angle AQB = \angle APD = 90^{o}$.

$\angle QAB + \angle PAD = 90^{o}$.



Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQB}$, $\overset{\Delta}{DPA}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{BQ} = \overline{AP} = 5$.

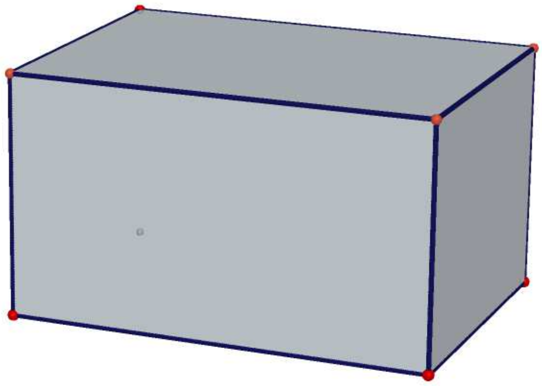
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQB}$:

$\overline{AB} = 13$.

L'àrea de la figura completa és igual a l'àrea d'un quadrat de costat 13 i d'un cercle de diàmetre 13:

$$S = 13^2 + \pi\left(\frac{13}{2}\right)^2 = 169 + \frac{169\pi}{4} \approx 301.73\ cm^2 .$$

1618.- Un paquet de correus té forma de caixa de sabates i les seues mesures són nombres naturals.



Si l'àrea de les seues cares són $80\,\text{cm}^2$, $112\,\text{cm}^2$, $140\,\text{cm}^2$.

Determineu les mesures del paquet.

Olimpíada Al-khwarizmi València 2015. Segona fase nivell A.

Solució:

Siguen a, b, i c les dimensions del paquet.

L'àrea de les cares és:

$ab = 80$.

$ac = 112$.

$bc = 140$.

Multiplicat les tres equacions:

$(abc)^2 = 80 \cdot 112 \cdot 140$.

Calculant l'arrel quadrada:

$abc = 2^5 \cdot 5 \cdot 7$.

$$\begin{cases} abc = 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \\ ab = 80 = 2^4 \cdot 5 \end{cases}.$$

Dividint ambdues expressions:

$c = 14$.

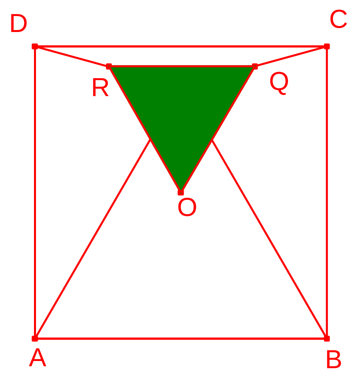
$$\begin{cases} abc = 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \\ ac = 112 = 2^4 \cdot 7 \end{cases}.$$

Dividint ambdues expressions:

$b = 10$.

$ab = 80$, $10a = 80$. Resolent l'equació:

$a = 8$.



1619.- En la figura ABCD és un quadrat, $\overset{\Delta}{ABP}$ un triangle equilàter.

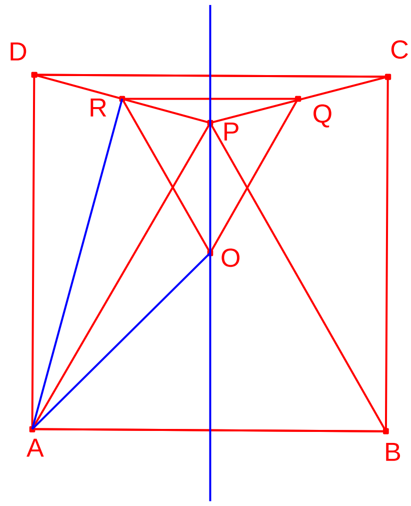
Q és el punt mig del segment $\overline{PC}$.

R és el punt mig del segment $\overline{PD}$.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ és equilàter.

Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.



$\overline{RQ}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{CDP}$. Aleshores:

$\overline{RQ} = \frac{1}{2}c$.

$\angle DAP = 30^o$, $\overline{AD} = \overline{AP} = c$. Aleshores:

$\angle ADP = \angle APD = 75^o$.

$\overline{AR}$ és altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{APD}$.

$\angle DAR = \angle RAP = 15^o$.

Notem que $\overline{OQ} = \overline{OR}$ ja que els triangles $\overset{\Delta}{AOR}$, $\overset{\Delta}{BOQ}$ són iguals.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ARD}$:

$\overline{AR} = c \cdot \cos 15^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és rectangle i isòsceles:

$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOR}$:

$$\overline{OR}^2 = \cos^2 15^o \cdot c^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - 2\cos 15^o \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 30^o.$$

Notem que $\cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$$\overline{OR}^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \cdot c^2 + \frac{1}{2}c^2 - 2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\overline{OR}^2 = \frac{1}{4} \cdot c^2$. Aleshores:

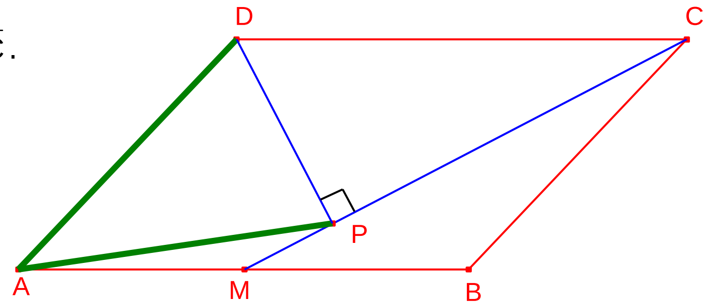
$\overline{OR} = \overline{OQ} = \frac{1}{2}c$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OQR}$ és equilàter.

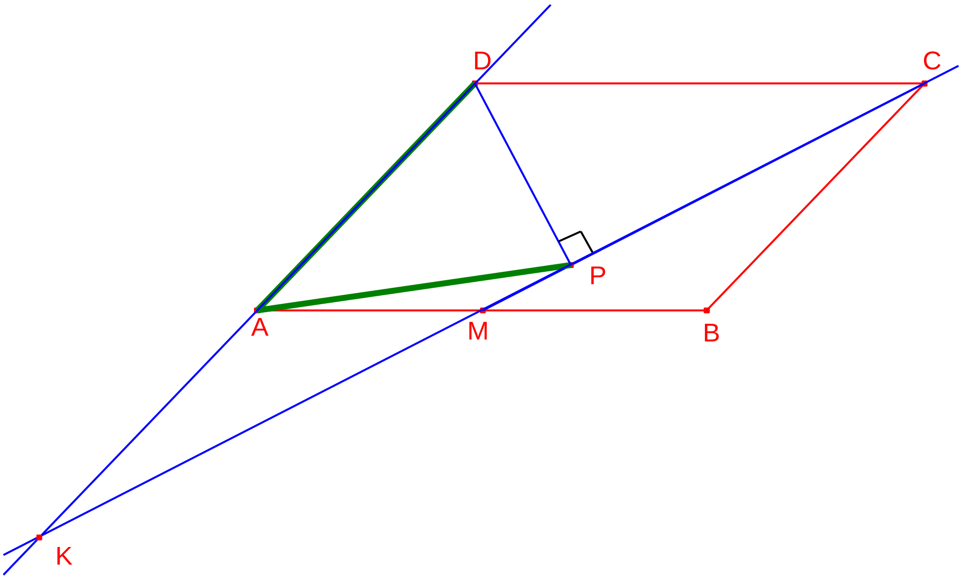
1620.- Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ del paral·lelogram ABCD.

Siga P la projecció de D sobre el segment $\overline{MC}$.

Proveu que $\overline{AP} = \overline{AD}$.



Solució:



Les rectes AD i MC és tallen en el punt Q.

Els triangles $\overset{\Delta}{KMA}$, $\overset{\Delta}{KCD}$ són semblants i de raó 1:2.

Aleshores, $\overline{KA} = \overline{AD}$.

El triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és rectangle i A és el punt mig de la hipotenusa.

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{AD}$.