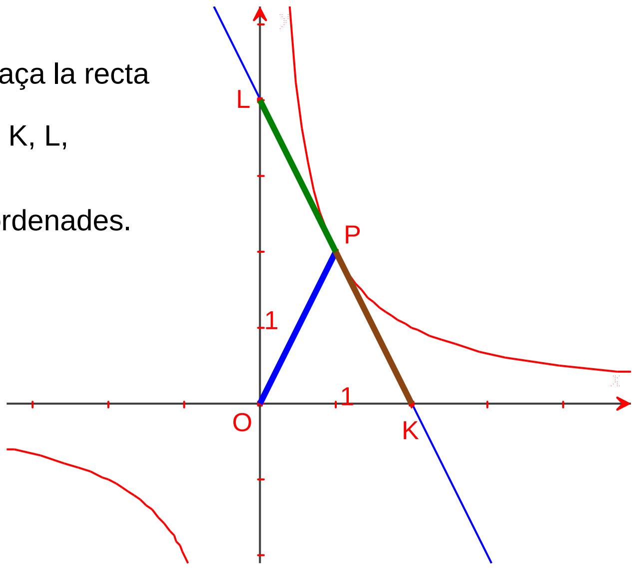
Problemes de Geometria per a l'ESO 163



1621.- Per un punt P de la hipèrbola $f(x)=\frac{k}{x}$ es traça la recta tangent que talla els eixos coordenats en els punts K, L, respectivament.

Proveu que $\overline{OP}=\overline{PK}=\overline{PL}$ on O és l'origen de coordenades.

Solució:

Siga $P\left(a,\frac{k}{a}\right)$ un punt qualsevol de la hipèrbola.

$$\overline{OP}=\frac{\sqrt{a^4+k^2}}{a}.$$

La recta tangent a la hipèrbola en el punt P té equació:

$$r_T\equiv y-\frac{k}{a}=-\frac{k}{a^2}(x-a).$$

Les coordenades dels punts K i L són:

Si $y=0$, $x=2a$, $K(2a,0)$.

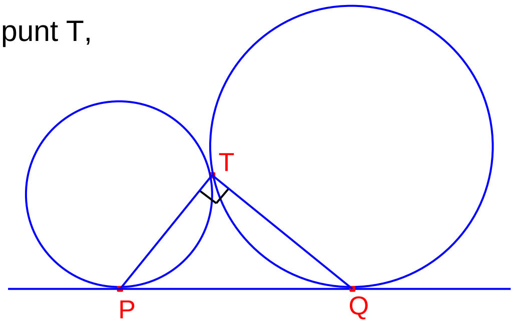
Si $x=0$, $y=\frac{2k}{a}$, $L\left(0,\frac{2k}{a}\right)$.

$$\overline{PK}=\frac{\sqrt{a^4+k^2}}{a}.$$

$$\overline{PL}=\frac{\sqrt{a^4+k^2}}{a}.$$

1622.- Dues circumferències són tangents exteriors en el punt T,

i tangents a una recta en els punts P i Q, respectivament. Demostreu que l'angle $\angle PTQ$ és recte.



Solució:

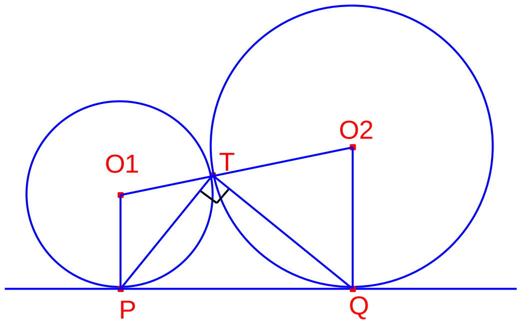
Siguen O_1, O_2 els centres de les dues circumferències tangents.

Els punts O_1, T, O_2 estan alineats.

$\angle O_1PQ = \angle O_2QP = 90^o$.

O_1O_2QP és un trapezi.

Siga $\angle TO_2Q = \alpha$.



El triangle $\overset{\Delta}{TO_2Q}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle O_2TQ = 90^o - \frac{\alpha}{2}$.

$\angle PO_1O_2 = 180^o - \angle TO_2Q = 180^o - \alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{TO_1P}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle O_2TP = \frac{\alpha}{2}$.

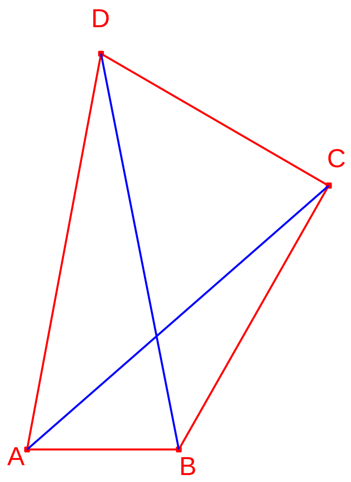
Aleshores, $\angle PTQ = 180^o - (\angle O_1TP + \angle O_2TQ) = 90^o$.

1623.- Els costats d'un quadrilàter mesuren, en aquest ordre, $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+3}$, $\sqrt{a+2}$ i $\sqrt{2a+5}$ i les dues diagonals $\sqrt{2a+5}$. Determineu l'angle major del quadrilàter.

KöMaL, C1300. Maig 2015.

Solució:

Siga el quadrilàter ABCD tal que $\overline{AB}=\sqrt{a}$, $\overline{BC}=\sqrt{a+3}$, $\overline{CD}=\sqrt{a+2}$ i $\overline{AD}=\sqrt{2a+5}$ i de diagonals $\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{2a+5}$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\cos A=\frac{2a+5-(2a+5)-a}{-2\sqrt{2a+5}\sqrt{a}}=\frac{a}{2\sqrt{2a+5}\sqrt{a}}$$, l'angle A és agut.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\cos B=\frac{2a+5-(a+3)-a}{-2\sqrt{a+3}\sqrt{a}}=\frac{-1}{\sqrt{a+3}\sqrt{a}}$$, l'angle B és obtús.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\cos C=\frac{2a+5-(a+3)-(a+2)}{-2\sqrt{a+3}\sqrt{a+2}}=\frac{0}{2\sqrt{2a+5}\sqrt{a}}=0,\quad C=90^{o}.$$

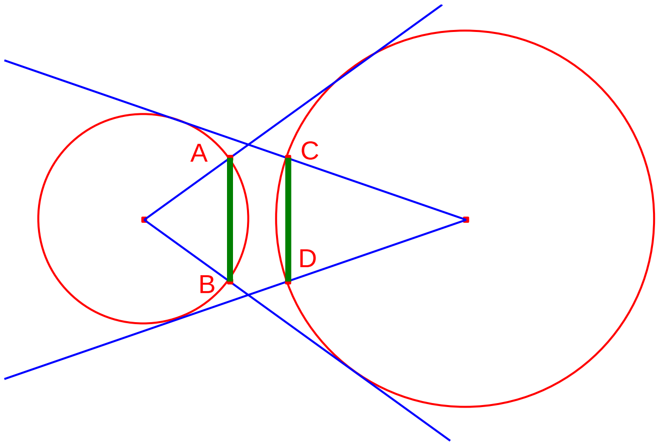
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDA}$:

$$\cos D=\frac{2a+5-(2a+5)-(a+2)}{-2\sqrt{2a+5}\sqrt{a+2}}=\frac{a+2}{2\sqrt{2a+5}\sqrt{a+2}}$$, l'angle D és agut.

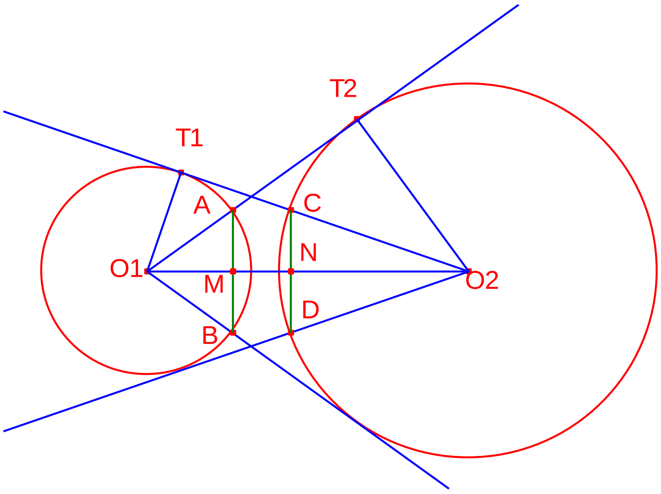
Aleshores, l'angle major és B.

1624.- Siguen dues circumferències exteriors (veure figura).

Pel centre de cada circumferència dibuixem les rectes tangents a l'altra circumferència.
Les cordes que determinen les rectes tangents $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ són iguals.



Solució:



Siguen O_1, O_2 els centres de les dues circumferències.

Siguen r_1, r_2 els radis de les circumferències de centres O_1, O_2, respectivament.

Siga $\overline{O_1O_2} = d$.

Siguen T_1, T_2 punts de tangència.

Siguen M i N els punts migs de les cordes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Els triangles rectangles $O_1\overset{\Delta}{T_2}O_2$, $O_1\overset{\Delta}{M}A$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r_2}{d} = \frac{\overline{AM}}{r_1}$. Aleshores, $\overline{AM} = \frac{r_1 \cdot r_2}{d}$.

Els triangles rectangles $O_2\overset{\Delta}{T_1}O_1$, $O_2\overset{\Delta}{N}C$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r_1}{d} = \frac{\overline{CN}}{r_2}$. Aleshores, $\overline{CN} = \frac{r_1 \cdot r_2}{d}$.

Aleshores, $\overline{AM} = \overline{CN} = \frac{r_1 \cdot r_2}{d}$, per tant, $\overline{AB} = \overline{CD}$.

1625.- Donat un cub i una piràmide quadrangular recta que té per base una cara del cub i que tots dos tenen igual àrea, calculeu la proporció entre els volums de la piràmide i el cub.

Solució:

Siga EL CUB ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB} = a$.

Siga ABCDV la piràmide quadrangular regular.

Siga O el centre de la cara ABCD.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

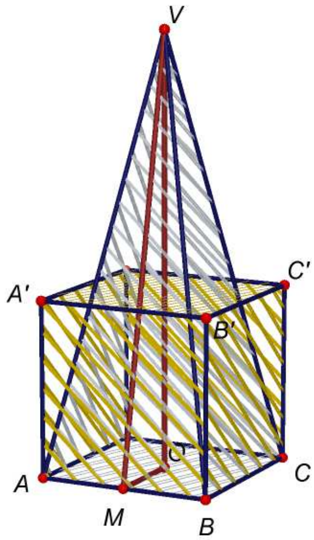
Siga $\overline{MV} = x$ l'altura d'una cara lateral de la piràmide.

Siga $\overline{OV} = h$ altura de la piràmide.

L'àrea del cub és: $S_{cub} = 6a^2$

L'àrea total de la piràimde és:

$$6a^2 = a^2 + 4\frac{1}{2}ax$$



El cub i la piràmide tenen la mateixa àrea, aleshores:

$6a^2 = a^2 + 2ax$.

Resolent l'equació:

$$x = \frac{5}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOV}$:

$$\left(\frac{5}{2}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2.$$

Resolent l'equació:

$h = a\sqrt{6}$.

El volum de la piràmide és:

$$V_{\text{piràmide}} = \frac{1}{3}a^2 a\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}a^3.$$

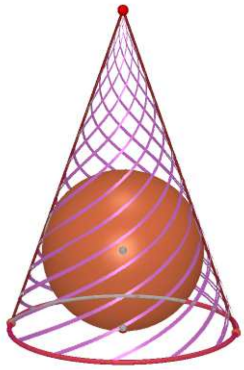
El volum del cub és:

$V_{cub} = a^3$.

La proporció entre els volums de la piràmide i el cub és:

$$\frac{V_{\text{piràmide}}}{V_{cub}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a^3}{a^3} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

1626.- Un con té inscrita una esfera.



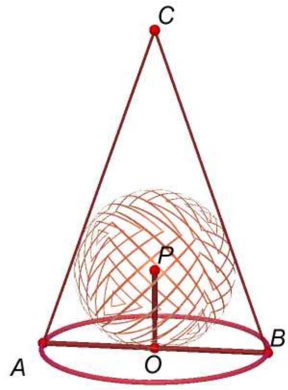
Si el volum de l'esfera és la meitat del volum del con, calculeu la proporció entre el radi del con i la generatriu del con.

Solució:

Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre de la base del con.

Siga O centre de la base del con.

Siga $\overline{AC} = \overline{BC} = g$ generatrius del con.



L'esfera és tangent al con, aleshores el radi de l'esfera és el radi de la circumferència inscrita al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{PO} = r$ radi de l'esfera.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{2(R+g)2(g-R)2R2R}}{4} = \frac{2(R+g)}{2} r .$$

Aleshores, $r = R\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOC}$:

$\overline{OC} = \sqrt{g^2 - R^2}$.

El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{g^2 - R^2} .$$

El volum de l'esfera és:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{g-R}{R+g}\sqrt{\frac{g-R}{R+g}} .$$

El volum de l'esfera és la meitat del volum del con, aleshores:

$$\frac{V_{con}}{V_{esfera}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{g^2-R^2}}{\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{g-R}{R+g}\sqrt{\frac{g-R}{R+g}}} = 2 .$$

Simplificant:

$9R^2 - 6gR + g^2 = 0$. Dividint l'expressió per g^2:

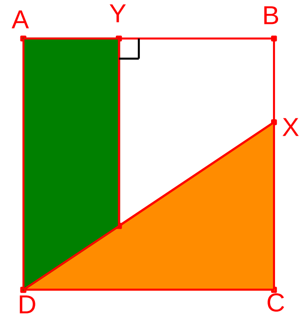
$9\left(\frac{R}{g}\right)^2 - 6\frac{R}{g} + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$$\frac{R}{g} = \frac{1}{3}.$$

En aquest cas, $g = 3R$, $\overline{OC} = 2R\sqrt{2}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

1627.- El quadrat ABCD de costat 90 quedat dividit en tres parts d'igual àrea.

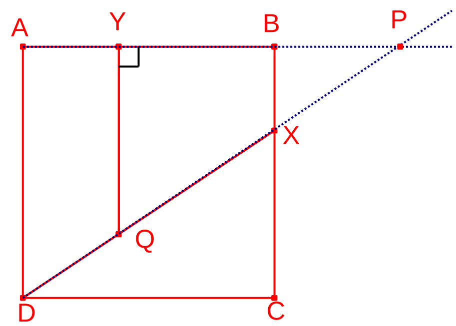
Determineu les mesures dels segments $\overline{CX}$ i $\overline{AY}$.



Solució:

Siga $\overline{CX} = x$ i $\overline{AY} = y$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCX}$ és igual a la tercera part de l'àrea del quadrat ABCD:



$\frac{90x}{2} = \frac{1}{3}90^2$. Resolent l'equació:

$x = 60$.

$\overline{BX} = 90 - 60 = 30$

La recta DX i la recta AB es tallen en el punt P.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCX}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PB}}{30} = \frac{90}{60}$. Resolent l'equació:

$\overline{BP} = 45$.

$\overline{PY} = 135 - y$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PYQ}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QY}}{1355 - y} = \frac{30}{45} \qquad (1)$$

L'àrea del trapezi ADQY és igual a la tercera part de l'àrea del quadrat ABCD:

$$\frac{90 + \overline{QY}}{2}y = \frac{1}{3}90^2 \qquad (2)$$

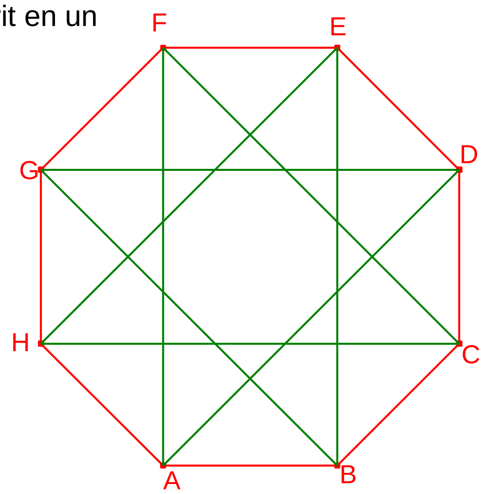
Considerem els sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{\overline{QY}}{1355 - y} = \frac{30}{45} \\ \frac{90 - \overline{QY}}{2}y = 2700 \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} \overline{QY} = 30\sqrt{5} \\ y = 135 - 45\sqrt{5} \approx 34.38 \end{cases}.$$

1628.- En la figura, un octògon estrellat regular està inscrit en un octògon regular.

Determineu la proporció entre les àrees de l'octògon estrellat i l'octògon convex.

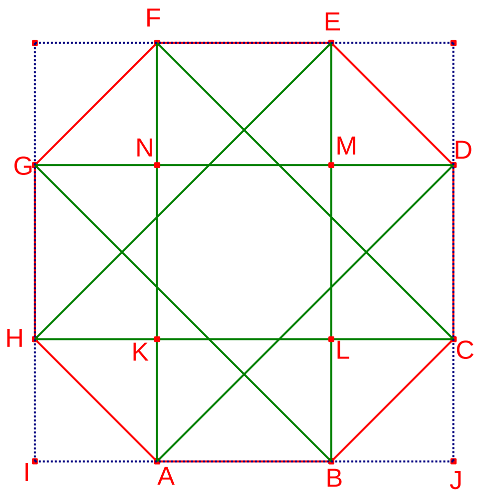


Solució:
Siga ABCDEFGH els vèrtexs dels dos octògons.

Siga $\overline{AB} = c$.

L'octògon convex està inscrit en un quadrat de costat $\overline{IJ}$ (veure figura).
Aplicnt el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BJC}$:

$$\overline{BJ} = \overline{BL} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$



L'àrea de l'octògon regular convex és igual a l'àrea del quadrat de costat $\overline{IJ}$ menys l'àrea de dos quadrats de costat $\overline{BJ}$:

$$S_{oct.con} = \left(c + 2\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2.$$

L'àrea de l'octògon regular estrellat és igual a l'àrea de l'octògon regular convex menys l'àrea de quatre quadrats de costat $\overline{BJ}$:

$$S_{oct.estre} = 2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 = 2\sqrt{2}\,c^2.$$

La proporció entre les àrees de l'octògon estrellat i l'octògon convex és:

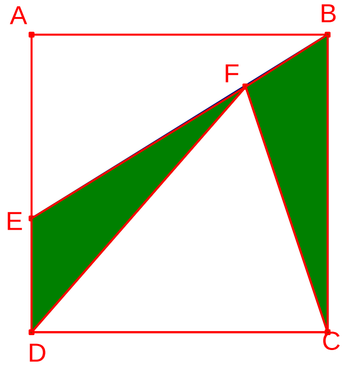
$$\frac{S_{oct.estre}}{S_{oct.con}} = \frac{2\sqrt{2}\,c^2}{2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2} = 2-\sqrt{2}.$$

1629.- Siga el quadrat ABCD de costat 13.

Siga E un punt del costat $\overline{AD}$ tal que $\overline{DE}=5$.

Siga F un punt del segment $\overline{BE}$ tal que els triangles $\overset{\Delta}{EDF}$ i $\overset{\Delta}{FBC}$ tenen la mateixa àrea.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DCF}$.



Solució:

Siga P la projecció de F sobre el costat $\overline{DC}$.

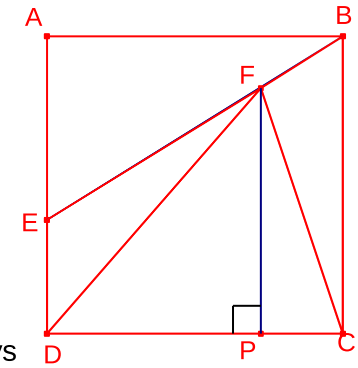
Siga $\overline{DP}=x$. Aleshores, $\overline{CP}=13-x$.

Els triangles $\overset{\Delta}{EDF}$ i $\overset{\Delta}{FBC}$ tenen la mateixa àrea, aleshores:

$$\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{DP}=\frac{1}{2}\overline{CB}\cdot\overline{CP}.$$

$5x=13(13-x)$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{169}{18}.$$

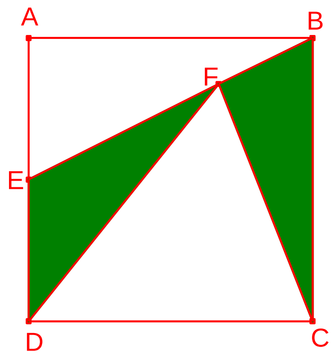


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DCF}$ és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{EDF}$ i $\overset{\Delta}{FBC}$:

$$S_{DCF}=S_{ABCD}-\left(S_{ABE}+S_{EDF}+S_{FBC}\right).$$

$$S_{DCF}=13^2-\left(\frac{1}{2}8\cdot 13+\frac{1}{2}5\frac{168}{18}+\frac{1}{2}13\frac{65}{18}\right)=\frac{1261}{18}\approx 70.06.$$

1630.- Siga el quadrat ABCD.



Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siga F un punt del segment $\overline{BE}$ tal que els triangles $\overset{\Delta}{EDF}$ i $\overset{\Delta}{FBC}$ tenen la mateixa àrea.

Determineu la proporció entre els segments $\overline{EF}$ i $\overline{EB}$.

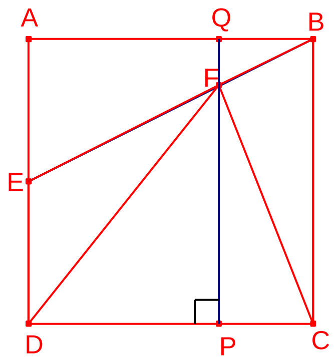
Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Siga P la projecció de F sobre el costat $\overline{DC}$.

Siga Q la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$

Siga $\overline{DP} = x$. Aleshores, $\overline{CP} = c - x$.



Els triangles $\overset{\Delta}{EDF}$ i $\overset{\Delta}{FBC}$ tenen la mateixa àrea, aleshores:

$\frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{DP} = \frac{1}{2}\overline{CB}\cdot\overline{CP}$.

$\frac{1}{2}\frac{c}{2}x = \frac{1}{2}c(c-x)$. Resolent l'equació:

$x = \overline{DP} = \overline{AQ} = \frac{2}{3}c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{QBF}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2}{3}c}{c} = \frac{2}{3}.$$

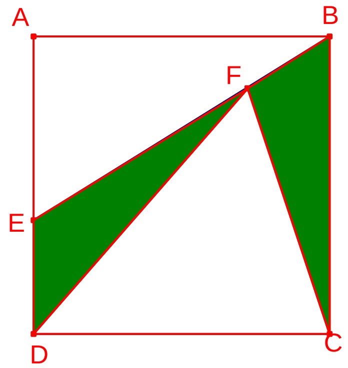
Generalització:

Siga el quadrat ABCD.

Siga E un punt del costat $\overline{AD}$ tal que $\overline{DE} = k \cdot \overline{AB}$, $0 < k \le 1$.

Siga F un punt del segment $\overline{BE}$ tal que els triangles $\overset{\Delta}{EDF}$ i $\overset{\Delta}{FBC}$ tenen la mateixa àrea.

Determineu la proporció entre els segments $\overline{EF}$ i $\overline{EB}$.



Solució:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} = \frac{1}{1+k}.$$